REPUBLIKA SLOVENIJA | MINISTRSTVO ZA ŠOLSTVO IN ŠPORT
unisVET
Naložba v vašo prihodnost
OPERACIJO DELNO FINANCIRA EVROPSKA UNIJA
Evropski socialni sklad

Viktorija Pirš

POSLOVNO RAČUNSTVO
UČBENIK

Program: EKONOMSKI TEHNIK
Modul: EKONOMIKA POSLOVANJA
Vsebinski sklop: POSLOVNO RAČUNSTVO IN STATISTIČNA ANALIZA POJAVOV

Ljubljana, november 2009

Srednje strokovno izobraževanje

Program: **Ekonomski tehnik**
Modul: **Ekonomika poslovanja**
Vsebinski sklop: **Poslovno računstvo in statistična analiza pojavov**

Naslov učnega gradiva
Poslovno računstvo učbenik

Ključne besede: **Sklepni račun, razdelilni račun, procentni račun, delilni kriterij, verižni račun, osnovne količine obrestnega računa, navadni obrestni račun, obrestno obrestni račun, dekurzivno obrestovanje, anticipativno obrestovanje, proporcionalna obrestna mera**

Seznam kompetenc, ki jih zajema učno gradivo:
PRS1: **Reševanje problemov s področja sklepnega, razdelilnega, procentnega in obrestnega računa.**

CIP - Kataložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

658.14/.17(075.3)(0.034.2)

PIRŠ, Viktorija
Poslovno računstvo [Elektronski vir] : učbenik / Viktorija Pirš. - El. knjiga. - Ljubljana : GZS, Center za poslovno usposabljanje, 2009. - (Srednje strokovno izobraževanje. Program Ekonomski tehnik. Modul Ekonomika poslovanja. Vsebinski sklop Poslovno računstvo in statistična analiza pojavov)

Način dostopa (URL): http://www.unisvet.si/index/index/activityId/44. - Projekt UNISVET

ISBN 978-961-6413-36-7

251108608

Avtor(ica): **Viktorija Pirš**
Recenzent(ka): **Viktor Stare**
Lektor(ica): **Vesna Fabjan**

Založnik: **GZS Ljubljana, Center za poslovno usposabljanje**
Projekt unisVET
URL: http://www.unisvet.si/index/index/activityId/44

Kraj in datum: **Ljubljana, november 2009**

To delo je ponujeno pod licenco Creative Commons:
Priznanje avtorstva - Nekomercialno - Deljenje pod enakimi pogoji.

Učno gradivo je nastalo v okviru projekta unisVET Uvajanje novih izobraževalnih programov v srednjem poklicnem in strokovnem izobraževanju s področja storitev za obdobje 2008-2012, ki ga sofinancirata Evropska unija preko Evropskega socialnega sklada in Ministrstvo Republike Slovenije za šolstvo in šport. Operacija se izvaja v okviru operativnega programa razvoja človeških virov za obdobje 2007 – 2013, razvojne prioritete: Razvoj človeških virov in vseživljenjskega učenja, prednostna usmeritev Izboljšanje kakovosti in učinkovitosti sistemov izobraževanja in usposabljanja.

Vsebina gradiva v nobenem primeru ne odraža mnenja Evropske unije. Odgovornost za vsebino nosi avtor.

KAZALO

PREDGOVOR ... **3**
1. RAZMERJA IN SORAZMERJA ... **5**
1. 1 SORAZMERJA ... 5
1. 2 PREMO SORAZMERJE IN OBRATNO SORAZMERJE ... 6
2. SKLEPNI RAČUN ... **8**
2. 1 ENOSTAVNI SKLEPNI RAČUN ... 8
2. 2 SESTAVLJENI SKLEPNI RAČUN ... 9
2. 2. 1 Postopek reševanja nalog sklepnega računa s shemo ... 11
2. 2. 2 Uporaba linearnih enačb ... 12
3. VERIŽNI RAČUN ... **14**
3. 1 POSTOPEK PISANJA VERIGE ... 14
3. 2 UPORABA TEČAJNE LISTE ... 15
3. 3 UPORABA TUJIH MERSKIH ENOT ... 16
3. 4 OBRAČUN DODATKOV IN POPUSTOV ... 16
4. RAZDELILNI RAČUN ... **19**
4. 1 ENOSTAVNI RAZDELILNI RAČUN ... 19
4. 1. 1 Delitev na enake dele ... 19
4. 1. 2 Delitev v razmerju ... 19
4. 1. 3 Delitev z ulomki ... 21
4. 1. 4 Delitev z razlikami ... 21
4. 2 SESTAVLJENI RAZDELILNI RAČUN ... 22
4. 2. 1 Sestavljeni razdelilni račun z združljivimi ključi ... 23
4. 2. 1 Sestavljeni razdelilni račun s parcialnimi ključi ... 23
5. PROCENTNI RAČUN ... **25**
5. 1 OSNOVE PROCENTNEGA RAČUNA ... 25
5. 2 RAČUNANJE POSAMEZNIH KOLIČIN ... 25
5. 3 RAČUNANJE POVEČANE IN ZMANJŠANE CELOTE ... 26
5. 4 UPORABA VERIŽNEGA RAČUNA ... 27
5. 5 UPORABA SORAZMERIJ ... 28
5. 6 SPREMEMBA CENE ... 28
5. 7 UPORABA LINEARNIH ENAČB ... 29
6. OBRESTNI RAČUN ... **31**
6. 1 OSNOVNE KOLIČINE V OBRESTNEM RAČUNU ... 31
6. 2 RAZDELITEV OBRESTNEGA RAČUNA ... 32
6. 2. 1 Štetje časa ... 33
6. 2. 2 Določanje obresti ... 33
7. NAVADNI OBRESTNI RAČUN ... **34**
7. 1 UPORABA NAVADNEGA OBRESTNEGA RAČUNA ... 34
7. 2 INTERKALARNE OBRESTI ... 36
8. OBRESTNOOBRESTNI RAČUN ... **38**
8. 1 DEKURZIVNI OBRESTNOOBRESTNI RAČUN ... 38
8. 2 ANTICIPATIVNI OBRESTNOOBRESTNI RAČUN ... 41
8. 2. 1 Ekvivalentnost dekurzivne in anticipativne obrestne mere ... 43
8. 2. 2 Povprečna obrestna mera ... 43
8. 3 POGOSTEJŠA KAPITALIZACIJA ... 45
8. 3. 1 Relativna ali proporcionalna obrestna mera ... 45
8. 3. 2 Konformna obrestna mera ... 47
9. LITERATURA ... **49**

PREDGOVOR

Učbenik Poslovno računstvo je v prvi vrsti namenjen dijakom srednješolskega programa ekonomski tehnik in je usklajen s katalogom znanj za poslovno računstvo v okviru modula Ekonomika poslovanja. Avtorica sem si vzela pisateljsko svobodo in obsežnost poglavij prilagodila svoji predstavi o pomembnosti tem. Ker pa se mnenja o tem vedno razhajajo, vas pozivam h kritičnemu razmišljanju in aktivnemu branju gradiva ter iskanju dodatne literature; te vam nekaj tudi priporočam, kar pa ne pomeni, da je seznam dokončen. Učbenik naj bi bil dijakom v začetno pomoč pri usvajanju znanja iz poslovnega računstva. Utrjevanju znanja in dodatnemu samostojnemu učenje sem namenila delovna zvezka Poslovno računstvo, 1.del in Poslovno računsto, 2. del, ki se nahajata spletni strani http://www.unisvet.si.

Strokovno je učbenik pregledal Viktor Stare, za odpravo jezikovnih napak pa je poskrbela Vesna Fabjan. Obema iskreno hvala za pomoč, pokazano dobro voljo in seveda za strokovne nasvete.

Učbenik je razdeljen na osem poglavij, v katerih teoretičnim osnovam sledijo računski primeri in rešene vaje. V učbeniku je zapisanih kar nekaj obrazcev za izračun različnih neznank, uporabnike gradiva pa pozivam k razumskemu pristopu k nalogam in ne zgolj k pomnjenju različnih obrazcev.

Poleg dobre volje in želje po znanju ter udobnega sedeža boste za smiselno prebiranje gradiva potrebovali še žepni kalkulator.

Veliko veselja.

Viktorija Pirš

Kamnik, sončne jeseni 2009

1. RAZMERJA IN SORAZMERJA

1. 1 SORAZMERJA

V poslovni praksi kakor tudi v vsakdanjem življenju so velikokrat poleg absolutnih vrednosti pomembna tudi razmerja med njimi. Razmerja prikažejo odnos dveh števil (a : b). Če bi na primer stal prevoz z avtobusom na neki relaciji 3,50 EUR, prevoz z vlakom na isti relaciji pa 3 EUR, bi bili ti dve ceni v razmerju 7 : 6. Torej je 3,50 EUR proti 3 EUR enako kot 7 : 6. V tem primeru smo izenačili dve enaki razmerji.

Izenačitev dveh enakih razmerij imenujemo **sorazmerje**. Zapis sorazmerja v splošnem je $a:b=c:d$, pri čemer so a,b,c in d *členi sorazmerja*, a in d sta *zunanja* člena sorazmerja, b in c pa *notranja* člena sorazmerja.

Osvežimo znanje matematike in ponovimo nekaj pravil, ki veljajo za računanje s sorazmerji.

Pravilo 1: V poljubnem sorazmerju $a:b=c:d$ je produkt zunanjih členov enak produktu notranjih členov: $ad=bc$.

Pravilo 2: S členi sorazmerja $a:b=c:d$ lahko naredimo kakršnokoli zamenjavo, pri kateri ostaneta produkta zunanjih členov oz. notranjih členov nespremenjena.

$$a:b=c:d \quad \Rightarrow \quad d:b=c:a \;, \quad a:c=b:d \quad \text{itd.}$$

Pravilo 3: **Zaporedna sorazmerja (sestavljena sorazmerja)** $x:y=a_1:b_1$

$a_2:b_2$

$\ldots:\ldots$

$a_n:b_n$

lahko nadomestimo z enostavnim sorazmerjem $x:y=(a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n):(b_1\cdot b_2\cdot\ldots\cdot b_n)$.

Včasih izenačimo več enakih razmerij. Če je npr. $a:x=k$, $b:y=k$, $c:z=k$, lahko to napišemo kot $a:b:c=x:y:z$. Takšno izenačenje več enakih razmerij imenujemo **podaljšano** ali **razširjeno sorazmerje**.

ZGLED 1

Neto osebni dohodek dveh delavcev določimo na osnovi dveh podatkov: glede na izobrazbo bi morali biti plači v razmerju 3 : 1 in glede na nevarnost na delovnem mestu 3 : 5. Kolikšen naj bo neto prejemek prvega delavca, če drugi zasluži 850 EUR?

Pri tej nalogi imamo opravka z zaporednim sorazmerjem, saj je osebni dohodek odvisen od dveh faktorjev – od izobrazbe in od nevarnosti na delovnem mestu. Tako dobimo zapis:

$x_1:x_2=3:1$

$3:5$, ki ga lahko nadomestimo z enostavnim razmerjem: $x_1:x_2=(3\cdot 3):(1\cdot 5)$.

Če v to sorazmerje vnesemo neto osebni dohodek drugega delavca, dobimo prejemek prvega, to je 1530 EUR.

ZGLED 2

Razmerje med Markovo in Petrovo štipendijo je 12 : 8, Tanjina, ki znaša 140 EUR, pa je z Markovo v razmerju 7 : 6. Izračunajte Markovo in Petrovo štipendijo!

Pri tej nalogi imamo dani dve sorazmerji (M : P = 12 : 8 in T : M = 7 : 6) in vrednost enega člena v drugem sorazmerju. S tem lahko postopoma izračunamo ostala dva neznana člena sorazmerja. Iz zapisa $140 : M = 7 : 6$ sledi, da ima Marko štipendijo v znesku 120 EUR. Če ta znesek vstavimo v prvo sorazmerje, izračunamo vrednost Petrove štipendije, tj. 80 EUR.

1. 2 PREMO SORAZMERJE IN OBRATNO SORAZMERJE

Dve količini sta **premosorazmerni**, če se zaradi povečanja ene količine 2-krat, 3-krat … poveča tudi druga količina natanko 2-krat, 3-krat …. Spremenljivki x in y sta premosorazmerni, če velja enačba $y = k \cdot x$, pri čemer konstanto k imenujemo **sorazmernostni faktor**.

$$y_1 = k \cdot x_1 \wedge y_2 = k \cdot x_2 \Rightarrow \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = k$$

$$y_1 : x_1 = y_2 : x_2 \Rightarrow x_1 : x_2 = y_1 : y_2$$

Primer **premosorazmernostnih** spremenljivk iz prakse: vrednost blaga (pri dani ceni blaga) je večja, če je množina blaga večja. Vrednost blaga je torej premosorazmerna množini blaga. Premosorazmernostni faktor je cena (vrednost blaga = cena x množina blaga).

Dve količini pa sta **obratnosorazmerni**, če se zaradi povečanja ene količine 2-krat, 3-krat … druga količina natanko 2-krat, 3-krat … pomanjša. Spremenljivki x in y sta obratnosorazmerni, če je njun produkt konstanten: $x \cdot y = k$ oz. $y = \frac{k}{x}$ (k > 0).

$$y_1 \cdot x_1 = y_2 \cdot x_2 = k \Rightarrow x_1 : x_2 = y_2 : y_1$$

Primer obratnosorazmernih spremenljivk: za določen znesek (vrednost) dobimo pri višji ceni manjšo množino blaga. (Čibej, 2002)

ZGLED 3

Za 7 m blaga smo plačali 21 EUR. Koliko stane 15 m tega blaga?

Ker za večjo množino blaga plačamo več, imamo opravka s premim sorazmerjem, za katerega velja zapis: $x_1 : x_2 = y_1 : y_2$. Če metre označimo z x in vrednost v EUR z y, dobimo $7 : 15 = 21 : y_2$. Z uporabo že znanega računskega postopka ugotovimo, da 15 m blaga stane 45 EUR.

ZGLED 4

Neko delo bi 10 delavcev opravilo v 28 urah. V kolikšnem času bi isto delo opravilo 7 delavcev?

Če se zmanjša število delavcev, ki opravljajo neko delo, bo seveda potrebnih več delovnih ur za njegovo realizacijo (seveda predpostavljamo enako učinkovitost vseh zaposlenih); zato sta število delavcev in število delovnih ur v obratnem sorazmerju. Če v zapis obratnega sorazmerja, tj. $x_1 : x_2 = y_2 : y_1$, vstavimo naše vrednosti, dobimo $10 : 7 = y_2 : 28$. Rešitev je logična, 7 delavcev bi za isto delo porabilo 40 ur.

V poglavju razmerja in sorazmerja smo poudarili pomembnost razlikovanja obeh pojmov. Ponovili smo znanje matematike, ponovili zapis zaporednega in podaljšanega sorazmerja ter na primeru prikazali razliko med premim in obratnim sorazmerjem. To znanje bomo uporabili v poglavjih, ki sledijo, predvsem pri razumevanju in reševanju nalog sklepnega računa, kjer se poleg najpogostejšega premega sorazmerja med količinami pojavlja tudi obratnosorazmerni odnos.

VAJE

1. Liter mleka stane 0,95 EUR.
a) Koliko bomo plačali za 12 litrov mleka?
b) Koliko litrov mleka manj bomo dobili za isti znesek, če je cena litra narasla za 0,19 EUR?

2. 33,3 kg neke zlitine ima prostornino 2,70 dm^3.
a) Koliko prostora zavzame 40-kilogramski odlitek iz te zlitine?
b) Koliko kg ima 1,50 dm^3 te zlitine?

3. Za tlakovanje kopalnice potrebujemo 180 keramičnih ploščic s ploščino 5 dm^2. Koliko ploščic bi potrebovali za isto kopalnico, če bi se odločili za ploščice s ploščino 2,25 dm^2?

Rešitve
1. a) 11,40 EUR, b) 2 litra
2. a) 3,24 dm^3, b) 18,5 kg
3. 400 ploščic

2. SKLEPNI RAČUN

Sklepni račun s svojim principom razmišljanja o premih in obratnih sorazmerjih med različnimi med seboj povezanimi količinami predstavlja temelj za izračunavanje drugih poslovnih izračunov. S sklepnim računom se srečamo že v osnovni šoli, naloge pa so se skozi izobraževanje pojavljale pri predmetu matematika ali poslovno računstvo in se primerno nadgrajevale.

Sklepni račun je postopek, s katerim izračunamo neko neznano količino iz dane množice znanih količin, ki so z neznano količino v premem ali obratnem sorazmerju. Neznanko izračunamo z neposrednim sklepanjem ali s sorazmerjem ali s sklepno shemo.

Če v nalogi nastopata samo dve količini (3 dana števila, računamo 4. število), govorimo o enostavnem sklepnem računu. Če pa nastopa več količin, govorimo o sestavljenem sklepnem računu. (Čibej, 2002)

2. 1 ENOSTAVNI SKLEPNI RAČUN

Dva najpogostejša načina reševanja nalog sklepnega računa si bomo pogledali na primerih enostavnega sklepnega računa.

ZGLED 1

Iz 200 g moke spečemo 12 kolačkov. Koliko kolačkov bi spekli iz 450 g moke?

Nalogo bomo najprej rešili s sklepanjem. Pri reševanju nalog s sklepanjem najprej ugotavljamo (sklepamo) za enoto (koliko kolačkov bi lahko spekli iz 1 g), nato sklepamo za novo količino (v našem primeru za 450 g).

Iz 200 g spečemo 12 kolačkov.

1 g …… $\frac{12}{200}$ kolačkov (dvestokrat manj kot iz dvesto gramov moke)

450 g …… $\frac{12 \cdot 450}{200} = 27$ kolačkov (štiristopetdestkrat več kot iz enega grama moke)

Isto nalogo rešimo sedaj še z uporabo sorazmerja. Že pri reševanju naloge s sklepanjem smo videli, da imamo opraviti s premim sorazmerjem. Vemo, da je enačba za premo sorazmerje $x_1 : x_2 = y_1 : y_2$. V našem primeru velja:

$x_1 = 200$ g, $x_2 = 450$ g

$y_1 = 12$ kolačkov, $y_2 = ?$ kolačkov

Iz zapisa $200 : 450 = 12 : y_2$ vidimo, da seveda dobimo enako rešitev kot v primeru reševanja s sklepanjem.

ZGLED 2

Iz neke količine bombažnega pletiva lahko skrbna babica za vnučka splete odejico, široko 1,2 metra in dolgo 1,4 metra. Kako dolga bo dejansko, če otrokova mati želi 10 cm ožjo odejo, na voljo pa je nespremenjena količina pletiva?

Predpostavljamo, da bo babica za ožjo odejo nasnula manj pentelj, torej bo lahko iz iste količine pletiva spletla daljšo odejo. Po naši ugotovitvi sta količini v obratnem sorazmerju.

Pri širini 1,2 m je odeja dolga 1,4 m.

1 m …… $1{,}4 \cdot 1{,}2$ m (1,2-krat daljša)

1,1 m …… $\frac{1{,}4 \cdot 1{,}2}{1{,}1} \approx 1{,}5$ m (1,1-krat manj)

Ugotovili smo, da sta širina in dolžina v obratnem sorazmerju. Torej v nalogi uporabimo zapis $x_1 : x_2 = y_2 : y_1$ oziroma $1{,}2 : 1{,}1 = y_2 : 1{,}4$, kar nas zopet privede do rešitve $y_2 \approx 1{,}5$ m.

2. 2 SESTAVLJENI SKLEPNI RAČUN

Naloge enostavnega sklepnega računa bomo nadgradili z nalogami sestavljenega sklepnega računa. Kot smo že omenili, tu na neznanko vpliva več spremenljivk hkrati. Logika reševanja nalog je podobna, le da sedaj nalogo rešujemo postopoma, jo na nek način razdelimo na več enostavnih sklepnih računov.

ZGLED 3

Neto osebni dohodek 4 delavcev, ki delajo na enakih delovnih mestih, v 3 mesecih znaša skupaj 9600 EUR. Koliko bosta skupaj zaslužila sodelavca v enem letu, če ne predpostavljamo spremembe dohodka?

Pri reševanju naloge predpostavljamo, da je neto zaslužek vseh zaposlenih na enakem delovnem mestu konstanten. Nalogo rešimo z direktnim sklepanjem tako, da najprej sklepamo na enega delavca, nato na dejansko število delavcev, nato spreminjamo na enoto še čas dela.

4 delavci …… 3 meseci …… 9600 EUR

1 delavec …… 3 meseci …… $\frac{9600}{4}$ EUR (en delavec zasluži 4-krat manj)

2 delavca …… 3 meseci …… $\frac{9600 \cdot 2}{4}$ EUR (dva delavca zaslužita 2-krat več)

2 delavca …… 1 mesec …… $\frac{9600 \cdot 2}{4 \cdot 3}$ EUR (v enem mesecu zaslužita 3-krat manj)

2 delavca …… 12 mesecev …… $\frac{9600 \cdot 2 \cdot 12}{4 \cdot 3} = 19200$ EUR

Nalogo lahko rešimo tudi s sorazmerjem. Za neznano količino pogledamo, v kakšnem sorazmerju je z ostalimi količinami (spremenljivkami). Nato sestavimo zaporedno sorazmerje. Zaslužek delavcev je hkrati:
- premosorazmeren številu delavcev,
- premosorazmeren številu mesecev.

Sedaj zapišemo podatke v obliki zaporednega sorazmerja.

$9600 : x_2 = 4 : 2$
$= 3 : 12$

Nalogo zaporednega sorazmerja smo rešili v zgledu 1 v prejšnjem poglavju. Zato vemo, da sledi zapis

$$9600 : x_2 = (4 \cdot 3) : (2 \cdot 12)$$

Z izračunom dobimo že znani rezultat, to je 19200 EUR.

ZGLED 4

Zaloga jabolk v vrtcu zadošča za 20 delovnih dni, če je v vrtcu vsak dan prijavljenih 80 otrok in porabimo 10 kg jabolk na dan. Za koliko časa zadošča ista zaloga jabolk v času poletnih počitnic, ko je v vrtcu dnevno prisotnih le 54 otrok in se dnevna poraba jabolk poveča za polovico?

Če nalogo rešimo z direktnim sklepanjem, pridemo do naslednjih ugotovitev:

80 otrok …… 10 kg/dan …… 20 dni
1 otrok …… 10 kg/dan …… $20 \cdot 80$ dni
54 otrok …… 10 kg/dan …… $\frac{20 \cdot 80}{54}$ dni
54 otrok …… 1 kg/dan …… $\frac{20 \cdot 80 \cdot 10}{54}$ dni
54 otrok …… 15 kg/dan …… $\frac{20 \cdot 80 \cdot 10}{54 \cdot 15} = 19{,}8 = 19$ dni

Zaloga jabolk bi v času poletnih počitnic zadoščala za 19 dni; če bi upoštevali matematično pravilo zaokroževanja, bi zadnjega dne nekaj otrok ostalo brez jabolk.

Ugotovili smo, da sta tako število otrok kot tudi porabljena dnevna količina jabolk v obratnem sorazmerju glede na število dni, za katere zadošča zaloga. Pri reševanju naloge s sorazmerjem zato dobimo naslednje zaporedno sorazmerje (ki nas pripelje do iste rešitve naloge):

$20 : x_2 = 54 : 80$
$= 15 : 10$

Ko usvojimo reševanje nalog sklepnega računa s sklepanjem oziroma s sorazmerji, se lahko lotimo reševanja teh nalog s pomočjo shematičnega prikaza odnosov med količinami, ki nastopajo v nalogi sklepnega računa.

2. 2. 1 Postopek reševanja nalog sklepnega računa s shemo

- V prvo vrstico zapišemo po vrsti količine iz prvega dela naloge, ki mu rečemo *pogojni stavek.*
- V drugi vrstici podpišemo ustrezne količine iz drugega dela naloge, t. i. *vprašalnega stavka*. Neznanko označimo z x.
- Ob vsak par količin narišemo puščico, pri čemer je puščica pri paru z neznanko in pri količinah, ki so le-tej premosorazmerne, postavljena POKONCI; pri tistih spremenljivkah, ki so obratnosorazmerne s spremenljivko z neznano vrednostjo, pa so puščice obrnjene NA GLAVO.
- Neznana vrednost x je enaka ulomku, ki ima v števcu količino, ki je zapisana nad neznanko, pomnoženo z vsemi ostalimi količinami ob začetku puščic; v imenovalcu pa produkt vseh preostalih količin, ki so zapisane ob konicah puščic. (Čibej, 2002)

Ta, pri študentih dostikrat najljubši način, ki bolj kot na sklepanju temelji še na nekih teoretičnih pravilih (ravno zato naj bi se najprej naučili reševanja s sklepanjem, to je razmišljanja z lastno glavo), si bomo pogledali v naslednjih dveh zgledih.

ZGLED 5

V posodi, dolgi 20 cm in široki 9 cm, stoji voda 12 cm visoko. Kako visoko seže gladina vode, če jo prelijemo v 15 cm dolgo posodo, ki pa je 1 cm širša?

Po navodilih zapišemo količine pogojnega in vprašalnega stavka ter nato ugotavljamo odnos med dolžino posode in višino vode ter odnos med širino posode ter višino vode.

Dolžina	širina	višina	
20 cm ↓	9 cm ↓	12 cm ↑	pogojni stavek
15 cm ↓	10 cm ↓	x cm ↑	vprašalni stavek

Sledi zapis v obliki ulomka, ki nas pripelje do rešitve naloge.

$$x = \frac{12 \cdot 20 \cdot 9}{15 \cdot 10} = 14{,}4 \text{ cm}$$

ZGLED 6

Skupina 9 delavcev opravi neko delo v 13 delovnih dneh, če delajo po 9 ur na dan. Koliko delavcev bo opravilo podobno delo v 15 delovnih dneh, če bodo delali po 8 ur na dan in bo obseg dela za približno 10 % večji?

9 delavcev ↑	13 dni ↓	9 ur/dan ↓	100 % ↑
x delavcev ↑	15 dni ↓	8 ur/dan ↓	110 % ↑

$$x = \frac{9 \cdot 13 \cdot 9 \cdot 110}{15 \cdot 8 \cdot 100} = 9{,}7 \approx 10 \text{ delavcev}$$

2. 2. 2 Uporaba linearnih enačb

V praksi se srečujemo z nalogami, ki jih ne moremo reševati po enotnih receptih. Besedilo naloge v tem primeru zapišemo v obliki linearne enačbe, nato pa iz te izluščimo neznano količino. Po navadi dobimo množico rešitev enačbe, iz katere nato izberemo tisto, ki ustreza postavljenemu problemu.

ZGLED 7

Za nek znesek dobimo pri uličnem prodajalcu 9 kepic sladoleda. V lokalu na bazenu za isti znesek dobimo eno kepico sladoleda manj, saj je tam kepica dražja za 0,10 EUR. Kakšna je cena sladoleda pri uličnem prodajalcu?

Ponovimo znanje ekonomije: *vrednost = cena · količina*. V obeh primerih porabimo enako količino denarja, torej je vrednost obakrat enaka (znotraj nje se obratnosorazmerno spremenita le cena in količina). Cena sladoleda pri uličnem prodajalcu je x, cena na bazenu pa je povečana za 0,10 EUR. Z upoštevanjem količin sledi zapis enačbe:

$x \cdot 9 = (x + 0{,}10) \cdot 8$

Izračun nam pokaže, da je kepica sladoleda pri uličnem prodajalcu 0,80 EUR.

ZGLED 8

V zavetišču za živali je trenutno 12 psov. Zaloga hrane za njih zadostuje za 20 dni. Za koliko dni bo sedaj zadoščala hrana, če so po štirih dneh dobili v oskrbo bernardinca, ki na dan poje hrane za dva povprečna psa iz zavetišča?

Enemu psu bi celotna količina hrane zadoščala za 12 · 20 dni (gre za obratnosorazmerni spremenljivki: manj kot je živali, za več dni zadošča hrana); lahko rečemo, da je na voljo 240 enot hrane. V prvih štirih dneh se porabi 12 · 4 enot hrane, v preostalih dnevih (kar je neznanka x) pa se živalim pridruži še bernardinec, ki zaradi nadpovprečne količine hrane, ki jo poje dnevno, v izračunu poveča število psov na 14. Pri zapisu matematične enačbe moramo slediti temu, da je skupna poraba hrane enaka razpoložljivi količini.

$12 \cdot 20 = 12 \cdot 4 + 14x$

Od tod dobimo $x = 13{,}7$, torej je hrane dovolj še za 13 dni, kar pomeni, da nam trenutna zaloga skupno zadošča za 4 + 13 dni, to je 17 dni.

Ponovitev enostavnega sklepnega računa nam je služila za nadaljnje reševanje nalog sestavljenega sklepnega račun. Spoznali smo različne načine izračunavanja nalog, pri vseh pa je pomembno logično sklepanje pri reševanju nalog in razstavljanje nalog na manjše člene.

VAJE

1. Če imamo v proizvodnji v uporabi tri enake stroje v dveh izmenah (vsaka izmena dela osem ur), lahko v desetih dneh izpolnimo naročilo 2400 istovrstnih izdelkov. Koliko dni bomo potrebovali, da bomo izdelali 3000 enakih izdelkov, če smo stare stroje zamenjali z dvema tehnološko naprednejšima, katerih urna proizvodnja je za 30 % višja, stroja pa obratujeta 24 ur na dan?

2. 3 likarice zlikajo v 8 urah neko količino perila. Koliko ur bi potrebovale 4 likarice, da bi zlikale polovično količino perila, za katerega pa zaradi njegove specifike potrebujejo tretjino več časa?

3. 6 delavcev bi neko delo končalo v 10 delovnih dneh. Prvih 5 dni pride na delo vseh 6 delavcev, zaradi dela na drugem projektu pa sta naslednje tri dni odsotna dva delavca. Koliko honorarnih delavcev bo potrebno dodatno zaposliti v preostalem času (po osmih dneh), da bodo delo končali v roku?

Rešitve

1. $9{,}6 \approx 10$ dni
2. 4 ure
3. 3 delavce

3. VERIŽNI RAČUN

Z globalizacijo trga se tako v poslovnem svetu kot tudi v zasebnem življenju vse bolj srečujemo s tujimi denarnimi enotami. Poleg tega se pri trgovanju z nekaterimi državami (ZDA, Velika Britanija) še vedno lahko srečamo z nam manj znanimi starimi merskimi enotami (čevlji, palci ipd.), ki sicer niso usklajene z mednarodnim sistemom merskih enot in jih v naši državi uradno ne smemo uporabljati. Pri preračunavanju v nam bolj domačo denarno valuto oziroma mersko enoto si lahko pomagamo s posebnim postopkom izračunavanja neznanke, ki mu rečemo ***verižni račun****. Verižni račun je poseben način izračunavanja nalog sestavljenega sklepnega računa. Lahko ga uporabljamo le v primeru, če so vse količine z neznano v premem sorazmerju. Ker je sam postopek izračuna dokaj preprost, hkrati pa lahko z njim obračunamo tudi vse nastale stroške oziroma dodatke in popuste, nastale pri poslovanju, se ga v praksi pogosto uporablja.*

3. 1 POSTOPEK PISANJA VERIGE

ZGLED 1

Koliko bomo plačali za tri zaboje briških češenj, če stane en kilogram češenj pri domačinu 3 EUR, v vsakem zaboju pa je po 8 kilogramov češenj?

Naloge se lotimo sistematično. Najprej preverimo, če so vse količine z neznanko v premem sorazmerju (ponovitev snovi prvega poglavja); če to drži, izpišemo količine, v katerih se pojavlja odnos enakosti.
x EUR …… 3 zaboji
1 kg …… 3 EUR
1 zaboj …… 8 kg

Nato začnemo pisati verigo.

1. Začnemo z vprašanjem (x EUR), nadaljujemo s količino, na katero se vprašanje nanaša (3 zaboji), v naslednjo vrstico na levi strani pa zapišemo količino z isto mersko enoto (1 zaboj).
2. Postopek nadaljujemo tako, da imamo v vsaki vrstici zapisan odnos enakosti oz. enakovrednosti dveh količin, mersko enoto količine na desni ponovljeno v naslednji vrstici na levi, veriga pa je zaključena, ko prispemo do merske enote, ki jo vsebuje vprašanje na začetku verige.
3. Da izračunamo neznano količino, delimo produkt iz desnega stolpca s produktom znanih količin iz levega stolpca. (Čibej, 2002)

x EUR	3 zaboji
1 zaboj	8 kg
1 kg	3 EUR

$$x = \frac{3 \cdot 8 \cdot 3}{1 \cdot 1} = 72 \text{ EUR}$$

3. 2 UPORABA TEČAJNE LISTE

Kot smo omenili, je tehnika verižnega računa najbolj uporabna pri preračunavanju tujih denarnih enot. Te so zbrane v **tečajni listi** oziroma **tečajnici**, tj. preglednici tečajev, ki veljajo na določen dan. Tečaj Banke Slovenije nam pove, koliko enot tuje valute ustreza vrednosti enega evra. Tečaj torej izraža ceno denarja, ki se dnevno spreminja. Pri tem se srečujemo z naslednjima pojmoma:

- *devalvacija* = padec tečajne vrednosti denarja,
- *revalvacija* = porast tečajne vrednosti denarja.

Ne pozabimo, da je evro (enotna valuta držav članic Evropske unije, za katero se vse članice niso opredelile in so nekatere obdržale svojo staro valuto) v Sloveniji zamenjal staro valuto tolar 1. 1. 2007.

Podatke o tujih denarnih enotah vsak dan najdemo v dnevnem časopisju, v katerem so objavljene tečajne liste z dnevnim zamikom, na teletekstu ali pa najnovejšo tečajnico poiščemo na internetnih straneh poslovnih bank ali na spletni strani Banke Slovenije http://www.bsi.si/, na kateri izvemo marsikaj tudi o sami banki in o evrosistemu. Dnevna tečajnica oziroma referenčni tečaji ECB (Evropska centralna banka) pa se nahaja na strani http://www.bsi.si/podatki/tec-bs.asp?MapaId=1230. Za lažje preverjanje rezultatov nalog bomo v tem poglavju uporabljali tečajnico Banke Slovenije, objavljeno na dan 22. 5. 2009 (tabela 1) z izbranimi tečaji.

Tabela 1: Nekaj tečajev iz tečajne liste z dne 22. 5. 2009

Država	**Valuta**	**Ozn. valute**	**Šifra valute**	**Tečaj**
ZDA	ameriški dolar	USD	840	1,3972
Japonska	japonski jen	JPY	392	131,41
Danska	danska krona	DKK	208	7,4458
Hrvaška	hrvaška kuna	HRK	191	7,319
Velika Britanija	britanski funt	GBP	826	0,8781

Vir: http://www.bsi.si/podatki/tec-bs.asp?MapaId=1230/ (22. 5. 2009)

ZGLED 2

Za tedenski najem apartmaja na Hrvaškem bi morali danski turisti plačati 3500 HRK. Koliko DKK so morali plačati za dvotedenski najem?

Za rešitev naloge bomo potrebovali dva tečaja, za hrvaško kuno in dansko krono, nato pa se bomo lotili reševanja po nam že znanem postopku pisanja verige.

x DKK …… 2 tedna
1 teden …… 3500 HRK
1 EUR …… 7,4458 DKK
1 EUR …… 7,319 HRK

x DKK	2 tedna
1 teden	3500 HRK
7,319 HRK	1 EUR
1 EUR	7,4458 DKK

$$x = \frac{2 \cdot 3500 \cdot 7{,}4458}{1 \cdot 7{,}319 \cdot 1} = 7121{,}27 \text{ DKK}$$

3. 3 UPORABA TUJIH MERSKIH ENOT

Pri poslovanju s tujino moramo biti pozorni na različe vedenjske navade poslovnih partnerjev in kupcev, na druge običaje in drugačne potrebe. Poleg tega pa moramo biti pozorni še na uporabo različnih merskih sistemov. V tabeli 2 so predstavljene nekatere merske enote in njihove medsebojne vrednostne povezave.

Tabela 2: Tabela merskih enot

ANGLEŠKE IN AMERIŠKE DOLŽINSKE MERE		ANGLEŠKE IN AMERIŠKE VOTLE MERE ZA TEKOČINE	
mile (mi) = 1760 yd	1609,35 m		
yard (yd) = 3 ft	0,91440 m	galon (gl) = 4gt	GB 4,5464 l USA 3,7856 l
foot (ft) = 12 in	0,30480 m	quartar (qt) = 2 pt	GB 1,1365 l USA 0,9464 l
inch (in) = 12 ln	0,02540 m	pint (pt) = 4 gi	GB 0,5683 l USA 0,4732 l
line (ln)	0,00212 m	gill (gi)	GB 0,1421 l USA 0,1183 l
ANGLEŠKE MERE ZA MASO		AMERIŠKE MERE ZA MASO	
long ton (lt) = 20 cwt	1016,047 kg	short ton (at) = 20 ct	907,185 kg
hundredweight (cwt) = 4 gr	50,8023 kg	central (ct) = 4 gr	45,3592 kg
quarter = 28 lb	12,7006 kg	quarter (gr) = 25 lb	11,3397 kg
pound (lb) = 16 oz	0,4536 kg	pound (lb) = 16 oz	0,4536 kg
ounce (oz) = 16 dr	28,3495 g	ounce (oz) = 16 dr	28,3495 g
dram (dr)	1,7718 g	dram (dr)	1,7718 g

Vir: Jager, 2002 (str. 39)

3. 4 OBRAČUN DODATKOV IN POPUSTOV

V verigi obračunamo **stroške pri nakupu ali prodaji** tako, da jih (če so podani v odstotkih - p) vključimo v denarno enoto (d.e.), ki je v vprašanju.

- Če stroški nastajajo pri nakupu blaga, se vrednost blaga poveča za vse stroške, ki smo jih imeli pri nabavi: *(100 + p) d. e. s stroški vred*.
- Pri prodaji pa bo zaslužek manjši, če moramo poravnati še določene stroške: *(100 – p) d. e. s stroški vred*.

Podobno izvedemo **obračun dobička in izgube**.

- Dobiček v odstotkih pomeni, da se nam znesek poveča za določen odtotek: *(100 + p) d.e.*
- Izguba v odstotkih pa pomeni, da se nam znesek zmanjša za ta odstotek: *(100 – p) d.e.*

Seveda je logika enaka tudi, če imamo opraviti s promili, le da se sedaj osnova iz 100 poveča na 1000.

ZGLED 3

Iz Edinburgha smo uvozili 500 litrov temnega piva po 2 GBP za 1 pint. Po koliko EUR bomo v Sloveniji prodajali pol litra tega piva, če so skupni uvozni stroški znašali 30 %, s prodajo pa bi radi dosegli 25 % dobiček?

V tej nalogi moramo upoštevati pretvorbo angleške mere za tekočino, uporabiti tečaj za britanski funt ter v ceno všteti stroške, nastale pri uvozu blaga ter vključiti željeni dobiček. V besedilu naloge se pojavi tudi podatek, ki ne vpliva na sam izračun prodajne cene piva, tj. uvoženih 500 l piva.

2 GBP …… 1 pt
1 pt …… 0,5683 l
1 EUR …… 0,8781 GBP
$p_{stroški}$ = 30 %
$p_{dobiček}$ = 25 %

x EUR	0,5 l
0,5683 l	1 pt
1 pt	2 GBP
0,8781 GBP	1 EUR

$$x = \frac{0{,}5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1}{0{,}5683 \cdot 1 \cdot 0{,}8781} = 2 \text{ EUR}$$

ZGLED 4

Koliko gramov zelenega čaja lahko kupimo v Kamniku za 10 EUR, če v Tokiju stane 1 kg tega čaja 5256,40 JPY, uvoznik pa želi pri uvozu plačati zanj 115 promil carinskih dajatev?

Ta naloga nas ne sprašuje po vsoti denarja, ampak je neznanka množina blaga, zato bo posebna previdnost potrebna pri obračunu stroškov.

x g …… 10 EUR
1 kg …… 5256,40 JPY
1 EUR …… 131,41 JPY
1 kg …… 1000 g
$P_{dajatve}$ = 115 ‰

x g	10 EUR
1 EUR	131,41 JPY
5256,40 JPY	1 kg
1 kg	1000 g
1115 g	1000 g

$$x = \frac{10 \cdot 131{,}41 \cdot 1 \cdot 1000 \cdot 1000}{1 \cdot 5256{,}40 \cdot 1 \cdot 1115} = 224{,}22 \text{ g}$$

Sedaj smo se že dodobra seznanili z tehniko verižnega računa, katerega pomanjkljivost je predvsem v tem, da pozabimo na pogoj za njegovo uporabo, in to je premosorazmeren odnos količin. V to poglavje smo že vključili odstotke, s katerimi pa se bomo podrobneje seznanili v enem izmed kasnejših poglavij.

VAJE

1. Koliko USD bo ameriški kupec plačal za 1 quartar ligurijskega oljčnega olja, če nabavna cena znaša 8,20 EUR za liter olja? Stroški prevoza so 40 % in se obračunajo od nabavne vrednosti, uvoznik pa se je uštel pri kalkulaciji in posluje z 10 % izgubo.

2. 3 yd nekega blaga stane v Londonu 40 GBP. Koliko EUR bo zaslužil angleški izvoznik pri 1 m tega blaga, če mora pokriti 26 ‰ stroškov, ki jih krije sam?

3. Jabolka prodajajo v 2-kilogramskih vrečah po 1,8 EUR za vrečo. Koliko bomo plačali za 30 kg teh jabolk, če nam je prodajalec odobril 7 % količinski popust, upoštevati pa moramo 3 % stroške zaradi nove embalaže?

Rešitve

1. 13,66 USD
2. 16,17 EUR
3. 26,98 EUR

4. RAZDELILNI RAČUN

V poslovni praksi je večkrat potrebno neko količino razdeliti na različne dele, ki so med seboj v nekem vnaprej predpisanem odnosu. Delimo npr. ustvarjeni dohodek, dobiček, izgubo, nagrade, stroške na proizvode itd. Udeleženci v razdelitvi so lahko tako fizične osebe ali skupine kot tudi različne vrste blaga. Računski postopki, ki pri tem nastajajo, sodijo v okvir razdelilnega računa, pri čemer ločimo več vrst razdelilnega računa. Tudi na tem mestu bomo uporabljali premo in obratno sorazmerje.

Glede na količino pogojev, ki vplivajo na delitev, ločimo:
- **enostavni razdelilni račun**, pri katerem na delitev vpliva en sam pogoj;
- **sestavljen razdelilni račun**, pri katerem delimo neko maso po več kriterijih delitve.

Glede na predpise delitev ločimo:
- delitev na enake dele,
- delitev v razmerju,
- delitev z ulomki,
- delitev z razlikami.

4. 1 ENOSTAVNI RAZDELILNI RAČUN

4. 1. 1 Delitev na enake dele

Delitev na enake dele lahko uporabljamo, ko so lastnosti udeležencev v delitvi enake.

ZGLED 1

Stroške tedenskega najema avtodoma v znesku 700 EUR so si med seboj na enake dele razdelili trije popotniki. Kolikšen delež stroškov najema plača vsak izmed njih?

Delitev na enake dele smo dodobra spoznali že v osnovni šoli, da ne rečemo v vrtcu, ko smo med seboj delili bonbone (če smo jih bili pripravljeni deliti, seveda). Zato kakšen poseben komentar k tej nalogi ni potreben, lahko le ponovimo, da delilno celoto razdelimo s številom udeležencev v delitvi.

$$\frac{700}{3} = 233{,}33 \text{ EUR}$$

$x_1 = x_2 = x_3 = 233{,}33$ EUR

4. 1. 2 Delitev v razmerju

Delitev v razmerju je v praksi najpogosteje zaslediti. Tu je odnos med deleži upravičencev delitve sorazmeren. Običajno gre za premo sorazmerje, včasih pa so deleži obratnosorazmerni danim razmerskim številom.

ZGLED 2

Na študentskem marketinškem festivalu je bila izplačana nagrada za najboljši propagandni oglas v znesku 1500 EUR. Nagrado sta si med seboj razdelila dva ustvarjalca oglasa glede na vloženo delo, tako da je prvi dobil 900 EUR. V kakšnem razmerju sta si razdelila nagrado?

Pri reševanju nalog razdelilnega računa nam bo v pomoč predvsem logično sklepanje. Pri tej nalogi sklepamo, da sta si nagrajenca razdelila denar v premem sorazmerju. Naloga ima malce obrnjen vrstni red reševanja, saj moramo iz znanih deležev delitve preiti k zapisu razmerja. Če je prvi udeleženec v delitvi dobil izplačanih 900 EUR, jih je drugi dobil 600 (razlika med celoto, tj. 1500 EUR, in 900 EUR). Torej velja $x_1 : x_2 = 900 : 600$. Že v prvem poglavju gradiva smo ugotovili, da so iz povsem praktičnih razlogov razmerja izražena z najmanjšimi naravnimi števili; spomnimo se, da so to cela pozitivna števila. Iz tega sledi okrajšava členov razmerja s 300, kar nas pripelje do rešitve oziroma delilnega razmerja, ki je 3 : 2.

ZGLED 3

Enkratno denarno pomoč v znesku 4800 EUR želimo razdeliti med tri družine v obratnem sorazmerju z dohodkom na družinskega člana. Dohodek na družinskega člana prve družine znaša 150 EUR, druge 200 EUR in tretje 120 EUR. Koliko denarne pomoči bo prejela posamezna družina?

Pri tej nalogi želimo deleže razdeliti v logičnem obratnem sorazmerju glede na dohodke, zato zapišemo obratne vrednosti števil 150, 200 in 120. Ponovitev srednješolskega znanja matematike, *obratna* oziroma *recipročna vrednost števila a* je $a^{-1} = \frac{1}{a}$, nam pomaga do zapisa

$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{1}{150} : \frac{1}{200} : \frac{1}{120}$, pri čemer smo z x_1, x_2 in x_3 označili družine.

Seveda se nato skušamo čim prej znebiti ulomkov, ker se sorazmerje ne spremeni, če množimo vse člene na desni strani z istim od 0 različnim številom, jih pomnožimo (po možnosti) z najmanjšim skupnim imenovalcem 600 in dobimo

$x_1 : x_2 : x_3 = 4 : 3 : 5$

Ker so razmerska števila samo okrajšana realna števila, jih pomnožimo z nam trenutno še neznanim osnovnim deležem, ki ga označimo z x.

$x_1 = 4x$ $\qquad$ $x_1 = 5 \cdot 222{,}2222 = 1111{,}11$ EUR

$x_2 = 3x$ $\qquad$ $x_2 = 4 \cdot 222{,}2222 = 888{,}89$ EUR

$x_3 = 5x$ $\qquad$ $x_3 = 6 \cdot 222{,}2222 = 1333{,}33$ EUR

Ker vsem trem družinam skupaj razdelimo 4800 EUR, so temu enaki deleži vseh družin. Velja torej $4x + 3x + 5x = 4800$, iz česar sledi, da je osnovni delež 400. Ko pomnožimo razmerska števila z izračunanim osnovnim deležem, dobimo zneske pomoči za vsako družino. Prva družina tako dobi 1600 EUR, druga 1200 EUR in tretja 2000 EUR. Če smo pravilno opravili delitev, se mora ujemati seštevek vseh deležev z delilno celoto.

4. 1. 3 Delitev z ulomki

ZGLED 4

Razdeli 2000 EUR med 3 člane projekta tako, da dobi prvi 1/4, drugi 3/5, tretji pa ostanek.

Kadar so posamezni delitveni pogoji za delitev podani z ulomki in je podana tudi delilna celota, lahko celoto samo pomnožimo z ulomkom in že dobimo ustrezen delež v delitvi. Iz tega sledi, da v našem primeru prvi član dobi 500 EUR, drugi 1200 EUR, tretji pa razliko med celoto in že izplačanimi deli, torej 300 EUR.

ZGLED 5

Določen znesek razdelimo takole: x_1 dobi 2/7, x_2 dobi 1/5, kar je 140 EUR, x_3 pa dobi ostanek. Koliko EUR smo razdelili?

Malce več dela imamo, ko delilna celota ni podana. Ker v našem primeru prav tako niso podani ulomki za vse udeležence, moramo najprej poiskati manjkajoči del. Enostavno ga dobimo, če iz znanih ulomkov poiščemo najmanjši skupni imenovalec (v tej nalogi je to 35) in nato vse ulomke pretvorimo na ta skupni imenovalec. V našem primeru velja: $x_1 = \frac{10}{35}$, $x_2 = \frac{7}{35}$, da bomo zadostili pogoju celote (tj. $\frac{35}{35} = 1$), znaša $x_3 = \frac{18}{35}$, kar je preostanek. Nadaljujemo s postopkom, ki smo ga spoznali pri zgledu 3. Ker pa tu celota ni znana, si pomagamo z znanim deležem drugega udeleženca. Torej velja $x_2 = 7x = 140$ EUR. Iz tega dobimo osnovni delež, ki je 20. Nato izračunamo še delež prvega in tretjega udeleženca v delitvi. Delilno celoto v tem primeru tvorijo vsi trije deleži skupaj, kar znaša 700 EUR.

4. 1. 4 Delitev z razlikami

ZGLED 6

Tekmovanje za inovatorja leta poleg laskavega naslova najboljšim trem prinaša tudi nekaj denarja, saj znaša nagradni sklad 10000 EUR. Denar se razdeli tako, da prvi dobi 3000 EUR več kot drugi, tretji pa 2000 EUR manj kot drugouvrščeni. Opravite delitev.

Kot vidimo v tem primeru, so za delitev podane absolutne razlike med upravičenci do dela sredstev. V primeru delitve z razlikami je potrebno določiti udeleženca, ki bo prejel osnovni delež, njegov delež torej označimo z x. Ker imamo za prvo- in tretjeuvrščenega inovatorja podano razliko glede na drugouvrščenega, le-tega označimo z x. Za ostale udeležence v delitvi pa zapišemo, koliko več oziroma manj dobijo glede na udeleženca z osnovnim deležem. Pri tem se bomo najbolj opirali na natančno branje naloge in uporabljali zdravo pamet. Tako pridemo do naslednjega zapisa:

x_1	x + 3000
x_2	x
x_3	x - 2000

Zapišemo vsoto vseh deležev $3x + 1000 = 10000$, iz česar z malo truda izračunamo osnovni delež oziroma nagrado drugouvrščenega, ki znaša 3000 EUR, iz česar dobimo znesek prvouvrščenega (6000 EUR) in tretjeuvrščenega (1000 EUR).

ZGLED 7

Knjižnica je naročila 20 izvodov najnovejše knjižne uspešnice. Razdelila jih je med štiri dislocirane enote tako, da je v prvi, to je centralni enoti, ostalo pet izvodov več kot v drugi enoti. Tretja enota je dobila 2 izvoda več kot druga, četrta pa polovico izvodov, ki sta jih dobili druga in tretja skupaj.

Po sklepanju, ki smo ga uporabili že pri reševanju prejšnjega zgleda, pridemo do naslednjega zapisa:

x_1	x + 5
x_2	x
x_3	x + 2
x_4	(x + (x + 2))/ 2

Ko izenačimo celotno število izvodov knjige s številom, ki jih dobi vsaka enota, lahko izračunamo osnovni delež, ki znaša 3 izvode. Iz tega sledi, da v centralni enoti ostane 8 izvodov, druga enota dobi 3 izvode, tretja 5 izvodov, četrta enota pa 4 izvode.

4. 2 SESTAVLJENI RAZDELILNI RAČUN

Običajno na delitev ne vpliva le en sam ključ delitve, temveč več. Najbližji nam bo morda primer osebnega dohodka delavcev, ki je odvisen od izobrazbe, zahtevnosti dela, delovne dobe in še bi lahko naštevali. V takih primerih imamo opraviti s sestavljenim razdelilnim računom.

Glede na to, kako obračunavamo z razdelilnimi ključi, ločimo dve vrsti sestavljenega razdelilnega računa:
- razdelilni račun z **združljivimi razdelilnimi ključi**, kjer lahko vse ključe združimo v enega in opravimo delitev, kot smo jo spoznali pod točko 2. 1;
- razdelilni račun s **parcialnimi ključi**, kjer delitev opravimo postopoma (po delih), saj se posamezni kriteriji delitve uporabljajo za delitev posameznih delov celotne delilne mase. (Jager, 2002)

4. 2. 1 Sestavljeni razdelilni račun z združljivimi ključi

ZGLED 8

Pomoč v znesku 4800 EUR razdelimo trem družinam tako, da bodo deleži premosorazmerni številu družinskih članov (teh imajo 5, 4 in 6) in obratnosorazmerni višini dohodkov na družinskega člana, ki znašajo za posamezno družino 150 EUR, 200 EUR in 120 EUR. Opravite delitev! (R: 1000 EUR, 600 EUR, 1000 EUR)

Pri tej nalogi smo dopolnili zgled 3, ko smo imeli opravka z delitvijo v razmerju. Poleg višine dohodka na družinskega člana sedaj na delitev vpliva tudi njihovo število. Na delitev torej vplivata dva ključa. Oba pogoja delitve lahko združimo v enega, previdnost je pri tem potrebna predvsem pri upoštevanju vrste sorazmerja. Pri tej nalogi ponovimo znanje o zaporednem sorazmerju, ki smo ga podrobneje spoznali v prvem poglavju (v zgledu 1). Zdaj nam ne bo težko zapisati zaporednega sorazmerja, ki velja za deleže pomoči našim družinam:

$x_1 : x_2 : x_3 = 5 : 4 : 6$ premosorazmerno glede na število družinskih članov

$= \frac{1}{150} : \frac{1}{200} : \frac{1}{120}$ obratnosorazmerno glede na dohodek na družnskega člana

Z razrešitvijo zaporednega sorazmerja dobimo naslednje razširjeno sorazmerje: $x_1 : x_2 : x_3 = \frac{1}{30} : \frac{1}{50} : \frac{1}{20}$. Od tukaj dalje računamo, kot bi imeli opravka z enostavnim razdelilnim računom – delitev v razmerju. Za vajo vas prepuščam lastni iznajdljivosti, deleži posameznih družin pa so naslednji: prva dobi 1548,39 EUR, druga 929,03 EUR in tretja družina 2322,58 EUR pomoči.

4. 2. 1 Sestavljeni razdelilni račun s parcialnimi ključi

ZGLED 9

Med pet poslovalnic razdelimo pošiljko 2000 kosov blaga, tako da:
- prvi dve dobita 25 % celotne količine, blago pa si med seboj razdelita v razmerju 3 : 2,
- naslednji dve dobita 3/5 celotne količine, med seboj pa si blago razdelita tako, da dobi tretja 200 kosov več kot četrta,
- peta poslovalnica dobi preostalo količino blaga.

Opravite delitev.

V tem primeru nastopajo trije ločeni kriteriji delitve. Najprej s pomočjo delitve z ulomki izračunamo, koliko bomo delili po prvem in drugem ključu (po prvem 500 kosov, po drugem 1200 kosov). Nato izračunamo po nam že znanem postopku delitve v razmerju količino, ki jo prejmeta prva in druga poslovalnica (prva prejme 300 kosov, druga 200 kosov blaga). Drugi ključ delitve nas spomni na delitev z razlikami in izračun pokaže, da dobi tretja poslovalnica 700 kosov, četrta pa 500 kosov. Peti poslovalnici logično preostane 300 kosov.

Kot smo spoznali na primerih, lahko vsako nalogo razdelilnega računa, naj se sliši še tako zapleteno, uvrstimo v neko vrsto razdelilnega računa. Ob pomoči usvojenega znanja prvega poglavja našega gradiva in logičnega sklepanja, ki je nenehno prisotno pri reševanju nalog, lahko nato opravimo katero koli delitev, če le imamo delilno celoto in koga, ki mu delimo, seveda. Tudi v tem poglavju smo se delno že dotaknili procentnega računa, ki predstavlja neko vrsto delitve z ulomki (odstotek je ulomek, ki ima v števcu 100). Vsekakor pa gre za tako pomembno temo, da ji bomo posvetil kar celo poglavje.

VAJE

1. Razdelite 5000 EUR med pet upravičencev tako, da vsak naslednji dobi 20 % manj od predhodnika.

2. Vneti igralec loterije je zadel denarno nagrado v znesku 5000 EUR. Od tega je 2/5 položil na svojo hranilno knjižico, ostalo je porabil za nakup zimskih pnevmatik za avto in za novo sedežno garnituro. Nov kos pohištva ga je stal 2200 EUR več kot nakup pnevmatik. Koliko denarja je porabil za nakup zimskih pnevmatik?

3. Slaščičar bo 6 kg moke razdelil po naslednjem merilu: 1/3 za torte, ostalo bo porabil za čokoladne in orehove piškote ter piškote s suhim sadjem. Od tega bo za orehove piškote porabil 20 dag moke manj kot za čokoladne, za piškote s suhim sadjem pa dvakrat toliko kot za orehove. Koliko moke bo porabil slaščičar za posamezne piškote?

Rešitve

1. x_1 = 1487,39 EUR, x_2 = 1189,91 EUR, x_3 = 951,93 EUR, x_4 = 761,54 EUR, x_5 = 609,23 EUR
2. 400 EUR
3. čokoladni piškoti: 115 dag, orehovi piškoti: 95 dag, piškoti s suhim sadjem: 190 dag

5. PROCENTNI RAČUN

5. 1 OSNOVE PROCENTNEGA RAČUNA

Ekonomista poleg količin in zneskov samih zanimajo tudi velikostni odnosi med njimi. Neredko se zgodi, da so ti še celo pomembnejši. S procentnim računom se srečujemo tudi pri vsakodnevnih opravilih in tudi dnevne novice se velikokrat podajajo v odstotkih, npr. cene stanovanj so se v letošnjem letu povečale za 15 %, rast zajamčenih osebnih dohodkov za 7 %, samo še ta teden akcija gospodinjskih aparatov – 30 % in podobno. Kljub obilju informacij, ki so podane ali se zahtevajo v odstotkih, pa procentni račun (ta izraz je pri večini še vedno bolj priljubljen od izraza odstotni račun) še vedno dostikrat predstavlja hude težave. V tem poglavju bomo uporabili nam že znane različne tehnike reševanja nalog, kot je reševanje s sklepanjem, z uporabo verige, s sorazmerji in zapisom linearne enačbe. Izbira je prepuščena vam samim, še vedno pa velja poudariti, da je poznavanje procentnega računa potrebno takrat, ko moramo samo z računalom v roki (ali še celo brez njega) rešiti ustrezen problem. Vse do sedaj omenjam le procentni račun, seveda pa ta vključuje tudi promile, ki se obračunavajo po podobni logiki.

Najprej poglejmo, kaj pomeni oz. pove beseda odstotek (procent) in odtisoček (promil).

- Latinsko »pro centum« pomeni »za sto«. Procent oz. odstotek je torej *stotina*. Ulomek $\frac{a}{100}$ zapišemo tudi **a %**.
- »Pro mille« pomeni »za tisoč«. Promil oz. odtisoček je *tisočina*. Ulomek $\frac{a}{1000}$ zapišemo kot **a ‰**.

Iz povedanega sledi, da odstotek predstavlja 10-krat večjo vrednost kot odtisoček (a % = 10a ‰). (Čibej, 2002)

5. 2 RAČUNANJE POSAMEZNIH KOLIČIN

ZGLED 1

V kateri avtošoli imajo uspešnejše kandidate? V prvi je v obdobju enega meseca izpit za osebno vozilo B-kategorije opravljalo 25 kandidatov, od tega je izpit uspešno opravilo 21 kandidatov, v drugi je v enakem obdobju izpit opravljalo 34 kandidatov, od tega jih je bilo uspešnih 28.

Kot vidimo, v danem primeru ne moremo avtomatično sklepati, da ima druga avtošola uspešnejše kandidate, saj ima tudi večje število vseh kandidatov, zato je potrebno izračunati ustrezen odstotek uspešnih kandidatov izmed vseh kandidatov za vsako šolo posebej. V nalogi smo se srečali s tremi osnovnimi količinami, celoto (25 oz. 34 kandidatov), deležem (21 oz. 28 kandidatov) in procentom, ki je v našem primeru neznanka.

V splošnem nam torej osnovne količine, ki se pojavljajo v nalogah procentnega računa, povedo sledeče:

- **Celota** (osnovna vrednost) (C) = količina, od katere računamo procente. Celota ustreza 100 %. Ta količina pomeni izhodišče za računanje deležev.
- **Delež** (D) = del celote in količina, za katero računamo odstotke, ali pa je za to količino odstotek naveden.
- **Procentna mera** (procentna stopnja, procent, odstotek) (P) = število, ki pove, koliko stotin celote predstavlja določen del.

Poglejmo, katera avtošola ima uspešnejše kandidate. Za vsako šolo posebej bomo s pomočjo sklepanja (za osvežitev znanja poglejte v 2. poglavje) izračunali odsotek uspešnih kandidatov.

Prva avtošola: 25 kandidatov …… 100 %

1 kandidat …… $\frac{100}{25}$ %

21 kandidatov …… $\frac{100 \cdot 21}{25} = 84$ %

Druga avtošola: 34 kandidatov …… 100 %

1 kandidat …… $\frac{100}{34}$ %

28 kandidatov …… $\frac{100 \cdot 28}{34} = 82{,}4$ %

Primerjava izračunanih odstotkov uspešnih kandidatov obeh avtošol nam pokaže drugačno sliko, uspešnejši so namreč kandidati prve avtošole (in ne druge, kot bi napačno sklepali, če bi upoštevali le absolutne podatke).

Iz postopka reševanja naše naloge lahko tudi sklepamo na osnovni obrazec procentnega računa, ki se uporablja v splošnem, pri čemer se izognite učenju le-tega na pamet.

Osnovni obrazec procentnega računa:

C …… 100 %
C/100 …… 1 %
(C/100)•p …… p %

$$D = \frac{C \cdot p}{100}$$

Do enakega rezultata pridemo z zapisom odnosa med celoto in deležem v obliki sorazmerja:

$$\text{C : D = 100 : p} \quad \Rightarrow \quad D = \frac{C \cdot p}{100}$$

Iz osnovnega obrazca lahko izrazimo ostali dve količini procentnega računa; tako dobimo:

$$p = \frac{D \cdot 100}{C}, \qquad C = \frac{D \cdot 100}{p}$$

(Čibej, 2002)

5. 3 RAČUNANJE POVEČANE IN ZMANJŠANE CELOTE

Odstotki se vedno računajo od celote (ki ustreza 100 %), lahko pa se zgodi, da celota ni znana, ampak je podana količina, ki pomeni za nek delež povečano ali zmanjšano celoto, C ± D. Znana je torej količina, ki ustreza (100 ± p) %, ali povedano drugače, znana je povečana $C^+ = C + D = (100 + p)$ % ali zmanjšana celota $C^- = C - D = (100 - p)$ %.

ZGLED 2

Ker smo račun poravnali z gotovino, nam je prodajalec priznal popust (skonto) v višini 8 % od prodajne cene blaga. Kolikšna je prodajna cena tega blaga, če smo s popustom plačali 47,84 EUR?

Ker nam je prodajalec odobril 8 % popust, smo plačali (100 – 8) %, kar znaša 92 % prodajne cene blaga. Iščemo osnovo, tj. 100 %. Predno se lotimo reševanja naloge s sklepanjem, pomislimo tudi na možno rešitev naloge (da ne bomo kot odgovor pisali absolutno nemogočih rešitev). Prodajna cena brez popusta mora biti večja od cene s popustom.

92 % …… 47,84 EUR

1 % …… $\frac{47,84}{92}$ EUR

100 % …… $\frac{47,84 \cdot 100}{92} = 52$ EUR

5. 4 UPORABA VERIŽNEGA RAČUNA

ZGLED 3

V prvi letnik višje šole, smer ekonomist, je vpisanih 26 študentov. Izmed 64,9 % študentk jih 25 % aktivno govori dva tuja jezika. Koliko študentk aktivno govori dva tuja jezika? Kolikšen je ta odstotek glede na vse vpisane študente?

Ker gre za premosorazmernost količin, lahko večino nalog procentnega računa rešujemo s pomočjo verižnega računa. Pri tem ponovimo poglavje 3. Naše naloge pa se moramo lotiti postopoma. Najprej izračunamo število vseh študentk (ali število vseh študentov ne glede na spol, kot nam je ljubše, s pomočjo odstotka vseh študentov (100 – 64,9) %, nato izračunamo odstotek tistih, ki aktivno govorijo dva tuja jezika.

x študentk	64,9 %
35,1 %	26 študentov

$x = \frac{64,9 \cdot 26}{35,1} = 48$ študentk

x študentk	25 %
100 %	48 študentk

$x = \frac{25 \cdot 48}{100} = 12$ študentk aktivno govori dva tuja jezika

Za vajo izračunajte še odstotek teh študentk izmed vseh študentov (16,2 %)

5. 5 UPORABA SORAZMERIJ

Če se spomnimo srednješolske matematike in pravila o enakosti produkta zunanjih in notranjih členov, lahko na osnovi osnovnega sorazmerja procentnega računa $C : D = 100 : p$ zapišemo, da velja:

$(C + D) : D = (100 + p) : p$ in $(C - D) : D = (100 - p) : p$.

Naj v tem delu samo opozorim na ponovitev poglavja 1, ki zajema sorazmerja.

5. 6 SPREMEMBA CENE

Zaradi pogostosti napačnega izračunavanja in interpretiranja nalog, v katerih nastopa, še posebej, če gre za večkratno zaporedno odstotkovno spremembo cene, bomo temu tipu nalog posvetili posebno poglavje.

ZGLED 4

Če bi se blago pocenilo za 4 %, bi stalo 10 EUR. Koliko pa stane sedaj, ko se je namesto tega dvakrat zapored podražilo za 5 %?

Najprej izračunamo ceno blaga brez pocenitve, kar znaša 10,42 EUR. To ceno nato povečamo za 5 % in dobimo ceno po prvi podražitvi, to je 10,94 EUR. Osnova za drugo podražitev je seveda bila nova cena, torej je končna cena (po dveh podražitvah) 11,49 EUR. Najpogostejša napaka pri takem tipu nalog je seštevanje odstotkov podražitev, kar nam sicer olajša izračun, vendar nas ne pripelje do pravilnega rezultata. Pa poglejmo z vidika potrošnika, v katerem primeru bomo plačali več, če se blago dvakrat zapored podraži za 5 % ali enkrat za 10 %. V drugem primeru je prodajna cena seveda nižja (11,46 EUR).

ZGLED 5

Koliko odstotkov znaša skupna podražitev po štirih zaporednih podražitvah: 5 %, 8 %, 4 % in 7 %?

Pri tej nalogi nimamo ne celote, ne zvečane ali zmanjšane celote. Pa vendar naloga ni tako težka, kot izgleda na prvi pogled. Osnova za prvo podražitev predstavlja 100 %, vse kasnejše podražitve se nato odvijajo druga za drugo (torej od povečane osnove). Ko dodobra osvojimo logiko procentnega računa, lahko nalogo rešimo z zapisom enega samega računa:

$100 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}08 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}07 = 126{,}19\ \%$

Cena po vseh štirih podražitvah predstavlja 126,19 % začetne cene, kar pomeni, da znaša skupna podražitev 26,19 %.

5. 7 UPORABA LINEARNIH ENAČB

ZGLED 6

Dve ceni sta v razmerju 3 : 2. Če prvo ceno zmanjšamo za 10 %, drugo pa povečamo za 5 ‰, je prva cena še vedno višja od druge za 10 EUR. Kolikšni sta ti dve ceni?

Po grobem razmisleku vidimo, da se dane naloge ne da rešiti z nobenim od prej uporabljenih računov. Torej nam preostane le zapis v obliki linearne enačbe pri čemer moramo upoštevati še razmerje teh dveh cen.

$x_1 = 3x$

$x_2 = 2x$

Namesto konkretnih zneskov cen bomo sedaj v enačbo vnesli razmerska števila, pomnožena z osnovnim deležem. Da pa bomo lahko zapisali odnos enakosti med cenama, moramo k drugi prišteti 10 EUR.

$$\frac{90 \cdot 3x}{100} = \frac{1005 \cdot 2x}{1000} + 10$$

Z izračunom dobimo osnovni delež, ki znaša 14,4928. Iz tega sledi, da je prva cena 43,48 EUR, druga pa 28,99 EUR.

ZGLED 7

Blago se je pocenilo za 8 %. Za koliko % več blaga lahko dobimo za isti denar?

Če se cena spremeni za določen odstotek, to še zdaleč ne pomeni, da se za isti odstotek spremeni množina blaga. Zopet se bomo spomnila na enačbo za vrednost (vrednost je produkt cene in količine). Sledi zapis

$$q \cdot p = \left(q + \frac{q \cdot x}{100} \right) \cdot \left(p - \frac{p \cdot 8}{100} \right)$$

Na desni strani enačbe lahko izpostavimo količino (q) in ceno (p), kar se nato pokrajša in ostane enačba z eno samo neznanko.

$$1 = (1 + x \cdot 0{,}01) \cdot (1 - 0{,}08)$$

To pa seveda brez težav izračunamo in dobimo rešitev 8,7 %. Za isti denar bi torej lahko kupili za 8,7 % več blaga.

Kot smo videli na zgledih imamo zelo širok spekter nalog procentnega računa, ki pa jih lahko računamo na različne načine. Ponovno smo uporabili znanje sklepnega in verižnega računa ter uporabo sorazmerij. Procentni račun pa nas bo še naprej spremljal v nalogah obrestnega računa.

VAJE

1. Šolskega tekmovanja v krosu se je udeležilo 280 učencev, od katerih je bilo 40 % deklic. Do cilja je uspelo priteči 75 % udeleženih deklic in 50 % udeleženih fantov. Kolikšno je skupno število učencev, ki so pritekli skozi cilj?

2. Cena blaga je najprej narasla za 15 %, nato je zopet narasla, tokrat za 25 %, potem pa padla za 12 %. Po vseh teh spremembah blago stane 41,75 EUR. Koliko je znašala prvotna cena blaga?

3. Prodajalec na bolšjem sejmu želi za starino iztržiti 300 EUR, kupec pa je pripravljen zanjo plačati le 250 EUR. Kolikšna naj bo kompromisna cena, da bosta oba popustila od svoje zahteve za enak odstotek?

Rešitve

1. 168 učencev
2. 33 EUR
3. 272,70 EUR

6. OBRESTNI RAČUN

Če prihranke hranimo doma in si denar sposojamo pri starših, nam bo obrestni račun dokaj tuja zadeva. Če pa smo vsaj enkrat že bili na banki, smo se s pojmom obresti gotovo srečali. Obresti niso nič drugega kot odškodnina za izposojeni denar. Z njimi se srečujemo tako fizične kot pravne osebe. Če zaupamo denar finančnim ustanovam, nam ta v zameno, ker lahko z njim razpolaga (ga posreduje naprej v obliki posojil), plača obresti. Lahko pa obratno kot fizična ali pravna oseba nastopamo v vlogi kreditojemalca in v tem primeru plačamo kreditodajalcu odškodnino v obliki obresti. Z obrestnim računom smo prišli na področje finančne matematike, kjer bomo ostali do konca gradiva. Najprej se bomo seznanili s teoretičnimi pojmi, ki nastopajo v obrestnem računu.

6. 1 OSNOVNE KOLIČINE V OBRESTNEM RAČUNU

Za reševanje nalog obrestnega računa je v prvi vrsti potrebno poznavanje temeljnih bančnih pojmov, ki se pojavljajo v pogodbah, in razumevanje predpostavk in postopkov pri računanju obresti.

- **Obresti** (**o)** so denarno nadomestilo, ki ga dolžnik plača upniku za izposojen denar, s katerim je dolžnik nekaj časa razpolagal (cena kapitala). Znesek obresti določajo glavnica, čas obrestovanja in obrestna mera.
- **Glavnica** (**G)** ali kapital je znesek, od katerega se računajo obresti.
- **Čas obrestovanja** (**l** - leto**, m** - mesec**, d** - dnevi**)** pove, kako dolgo se neka glavnica obrestuje. Obresti so pri tem naraščajoča funkcija časa obrestovanja.
- **Obrestna mera** (**p**) oz. obrestna stopnja je sorazmerni faktor, ki določa, koliko denarnih enot (d. e.) obresti odpade na vsakih 100 d. e. glavnice, ki smo jo uporabljali eno kapitalizacijsko obdobje. Obrestna mera je v osnovi definirana kot letna obrestna mera, ki jo po potrebi lahko preračunamo oz. reduciramo na krajša časovna obdobja.

Za nadaljnje razumevanje opisa različnih vrst obrestnega računa bomo opredelili še pojem kapitalizacijskega obdobja. **Kapitalizacijsko obdobje** je *časovno obdobje med dvema zaporednima pripisoma obresti*. Osnovno in najdaljše kapitalizacijsko obdobje je eno leto in temu ustreza letna obrestna mera, najkrajše kapitalizacijsko obdobje pa je en dan. Če kapitalizacijsko obdobje ni eno leto, mora biti to dejstvo posebej navedeno v pogodbi. Kot smo že omenili, se obresti računajo od osnovne glavnice. Poleg te pa poznamo še:

- **povečano glavnico** ($\mathbf{G}^{+}$), ki jo dobimo, če h glavnici prištejemo obresti; torej velja: $G^{+} = G + o$;
- **pomanjšano glavnico** ($\mathbf{G}^{-}$), ki nastane, če od glavnice obresti odštejemo. Postopek zmanjšanja glavnice za obresti imenujemo *diskontiranje*, obrestno mero pa *diskontna obrestna mera*. Velja: $G^{-} = G - o$. (Čibej, 2004)

6. 2 RAZDELITEV OBRESTNEGA RAČUNA

Obrestni račun ločimo glede na dva kriterija.

a) Glede na čas dospetja glavnice oz. trenutka, v katerem obračunavamo obresti, ločimo:

- **Dekurzivno obrestovanje,** pri katerem je osnova za izračun obresti glavnica na začetku posameznega kapitalizacijskega obdobja. Obresti se pripisujejo h glavnici na koncu kapitalizacijskega obdobja.



G G + o

Slika 1: Dekurzivno obrestovanje

- Pri **anticipativnem obrestovanju** pa je osnova za izračun obresti končna vrednost glavnice. V primeru anticipativnega obrestovanja se obresti pripišejo oz. odštejejo od glavnice že na začetku posameznega kapitalizacijskega obdobja.

G - o G

Slika 2: Anticipativno obrestovanje
Vir: Lasten

V vsakodnevni praksi je pogostejše dekurzivno obrestovanje. Uporaba anticipativnega obrestovanja, ki je pri dani obrestni meri dražje od dekurzivnega, mora biti izrecno navedena v pogodbi.

b) Glede na kapitalizacijo obresti v obračunskem obdobju pa ločimo:

- **Navadni obrestni račun (n. o. r.),** pri katerem *je obrestna osnova ves čas obrestovanja enaka*. Nominalna vrednost obresti je pri ostalih konstantnih pogojih ves čas enaka, saj se vseskozi obrestuje prvotna (začetna) vrednost glavnice. Skupni znesek dolga (glavnica in obresti) zato narašča kot aritmetično zaporedje.

- **Obrestnoobrestni račun (o. o .r.)**, pri katerem *se obresti v vsakem kapitalizacijskem obdobju sproti pripišejo h glavnici*. Govorimo o kapitalizaciji obresti, saj se poleg začetne vrednosti glavnice obrestujejo tudi obresti iz predhodnih kapitalizacijskih obdobij. Pri tem računu glavnica narašča kot geometrijsko zaporedje. (Čibej, 2004)

Svet Banke Slovenije je julija 2008 potrdil prenovljena priporočila o načinu obračunavanja obresti za posle s prebivalstvom, ki med drugim vsebujejo tudi slovarček bančnih pojmov. Priporočila upoštevajo vso veljavno zakonodajo in jih priporočam v dodatno branje. Najdete jih v brošuri z istoimenskim naslovom ″Priporočila o načinu obračunavanja obresti za posle s prebivalstvom″, ki jo je izdalo Združenje bank Slovenije, ali na spletni strani http://www.bsi.si/poslovanje-bank-in-podjetij.asp?Mapald=508.

Na tem mestu ne bo odveč tudi ponoviti učno snov matematike, ki zajema obravnavo zaporedij, saj smo videli, da se pojavljajo v obrestnem računu.

6. 2. 1 Štetje časa

V bančnih poslih čas štejemo v letih, polletjih, četrtletjih, mesecih in dnevih. Največ težav nastaja pri najpogostejšem štetju časa, to je v dnevih. Praviloma pri štetju obrestovalnega časa upoštevamo, da se prvi dan šteje v obrestovalni čas, zadnji dan pa ne. V našem bančnem sistemu se pri obračunu obresti šteje dejansko število dni po koledarju, z upoštevanjem dejanskega števila dni v letu (K, 365/366).

Možna so tudi druga štetja dni (K,360), kar pomeni, da banka leto obravnava, kot bi imelo 360 dni. Ker se to dogaja v bančni praksi predvsem pri posojilih, naj omenim, da ta način štetja dni pri nespremenjenih ostalih pogojih podraži kredit. V tujini pa se pojavlja tudi štetje (30, 360), ki poleg zaokroževanja števila dni v letu na 360 zaokroži tudi vsak mesec na enako število dni, tj. 30 dni. (ZBS, 2008)

6. 2. 2 Določanje obresti

Zaradi visoke inflacije smo bili dolgo časa navajeni na obrestno mero, ki je bila sestavljena iz dveh delov, iz inflacijskega dela (ki ga je do nedavnega ponazarjala temeljna obrestna mera – TOM) in realne obrestne mere (ki je dejansko pomenila nadomestilo za uporabo tujega denarja). Danes pogodbeno obrestno mero (ki je izražena na najmanj dve decimalni mesti natančno) razumemo kot nominalno obrestno mero, ki je lahko izražena kot:

- enovita (z eno številko zapisana) nominalna obrestna mera,
- sestavljena (skupna) nominalna obrestna mera, ki predstavlja vsoto referenčne obrestne mere in obrestnega pribitka. (ZBS,2008)

Referenčne obrestne mere so tržne obrestne mere, ki so izhodišče za določanje nominalnih obrestnih mer. Običajno so to medbančne obrestne mere (EURIBOR, LIBOR). Prikaz njunih trenutnih vrednosti lahko najdete na spletni strani http://www.euribor.org/html/content/euribor_data.html in http://www.bba.org.uk/bba/jsp/polopoly.jsp?d=141&a=627

Zanimivosti in novosti s področja bančnega poslovanja lahko najdete tudi na spletni strani Banke Slovenije http://www.bsi.si in Evropske centralne banke http://www.ecb.int/ecb/html/index.sl.html

Pridobljeno teoretično znanje nam bo sedaj pomagalo pri reševanju konkretnih nalog obrestnega računa. Seveda pa nas čaka še nekaj novih pojmov, s katerimi bomo nadgradili osnovne pojme. Preden nadaljujete s študijem, naj vas spomnim na nujnost dobrega poznavanja vašega računala (žepnega računalnika) oziroma njegovo uporabnost, hkrati pa vas opozarjam na logičnost rešitev nalog (npr. nominalno začetna glavnica nikakor ne more biti večja od svoje končne vrednosti).

7. NAVADNI OBRESTNI RAČUN

Navadni obrestni račun, ki predstavlja osnovo celotnega obrestnega računa, je predvsem značilen za kratkoročne vloge (depozite) in podobne posle. Uporablja se pri meničnih poslih, pri osebnih računih in različnih hranilnih vlogah. Kot smo že omenili, izhajamo pri navadnem obrestnem računu iz predpostavke, da obresti ves čas računamo od prvotne (začetne, osnovne) glavnice, ne glede na to, koliko kapitalizacijskih obdobij je medtem preteklo.

7. 1 UPORABA NAVADNEGA OBRESTNEGA RAČUNA

ZGLED 1

Glavnica 1000 EUR se je obrestovala od 12. 1. 2009 do 27. 5. 2009. Na koliko je narasla glavnica v tem času, če se obrestuje po 4 % letno, dnevi se štejejo po sistemu (K, 365) in banka za take vloge uporablja navadni obrestni račun ter dekurzivno obrestovanje?

Osnovna glavnica naraste na za obresti povečano glavnico. Kot vemo, so obresti premosorazmerne osnovni glavnici, obrestni meri in času obrestovanja. Torej so obresti višje, če je večja osnovna glavnica, če se le-ta obrestuje po višji obrestni meri in če imamo daljši čas obrestovanja (in obratno, seveda). Ker pa je obrestna mera podana v odstotkih, moramo upoštevati stotine v imenovalcu ulomka. Z logičnim direknim sklepanjem tako pridemo do zapisa enačbe za izračun navadnih obresti v splošnem, ki se glasi:

- če čas obrestovanja štejemo v letih: $o = \frac{G \cdot p \cdot l}{100}$
- če čas obrestovanja štejemo v polletjih: $o = \frac{G \cdot p \cdot s}{200}$
- če čas obrestovanja štejemo v četrtletjih: $o = \frac{G \cdot p \cdot q}{400}$
- če čas obrestovanja štejemo v mesecih: $o = \frac{G \cdot p \cdot m}{1200}$

- če čas obrestovanja štejemo v dnevih (pri sistemu (K,365/366)):

$$o = \frac{G \cdot p \cdot d}{36500} \text{ ali } o = \frac{G \cdot p \cdot d}{36600}$$

V našem primeru najprej izračunamo število dni obrestovanja glavnice. Od 12. januarja do 27. maja se je v letu 2009 glavnica obrestovala natanko 135 dni. Po osnovnem obrazcu za dneve izračunamo obresti, ki so nastale v tem obdobju:

$$o = \frac{G \cdot p \cdot d}{36500} = \frac{1000 \cdot 4 \cdot 135}{36500} = 14{,}79 \text{ EUR}$$

Ne pozabimo, da denarne enote zaokrožujemo na dve decimalni mesti natančno. K obrestim še pripišemo glavnico, da dobimo iskani znesek.

$$G^{+} = G + o = 1000 + 14{,}79 = 1.014{,}79 \text{ EUR}$$

ZGLED 2

Glavnica 400 EUR se je obrestovala 4 mesecev, glavnica 500 EUR 2 meseca in glavnica 800 EUR 1 mesec. Izračunajte skupne obresti, če je obrestna mera 3,7 %, obrestovanje dekurzivno in upoštevamo navadni obrestni račun.

Skupne obresti predstavljajo vsoto vseh obresti, ki jih dajo posamezne glavnice za čas njihovega obrestovanja. Za vsako glavnico posebej torej izračunamo, kolikšne obresti prinese v predvidenem času obrestovanja, nato pa te obresti le še seštejemo. Z upoštevanjem osnovne enačbe $o = \frac{G \cdot p \cdot m}{1200}$ za vajo izračunajte obresti. Njihova vsota je nato 10,48 EUR.

ZGLED 3

Po kolikšni obrestni meri se je obrestoval dolg 5000 EUR, ki je v pol leta pri upoštevanju dekurzivnega obrestovanja in navadnega obrestnega računa narasel za 125 EUR?

V tem zgledu so obresti že podane, iščemo pa obrestno mero.Izračunamo jo iz osnovne enačbe $o = \frac{G \cdot p \cdot s}{200}$ in tako dobimo $p = \frac{o \cdot 200}{G \cdot s}$. V dobljeno enačbo vstavimo podatke in izračunamo neznanko. Dolg se je obrestoval po 5 % obrestni meri.

ZGLED 4

Izračunajte obrestno mero, ki bi v treh četrtletjih prinesla obresti v nominalni vrednosti 10 % od začetne vrednosti glavnice. Upoštevati je potrebno navadni obrestni račun in dekurzivni način.

Ker nimamo podane ne osnovne in ne povečane glavnice, si samo z enačbo $o = \frac{G \cdot p \cdot q}{400}$ in $G^+ = G + o$ ne pomagamo kaj dosti. Ker pa obresti znašajo 10 % začetne vrednosti glavnice, predstavlja končna glavnica 110 % začetne, kar v obliki deleža pomeni 1,1 začetne glavnice ($G^+ = 1{,}1G$). V enačbo $G^+ = G + o$ namesto obresti vstavimo enačbo za zapis obresti in dobimo $1{,}1 \cdot G = G + \frac{G \cdot p \cdot 3}{400}$. Ko izpostavimo glavnico na desni strani enačbe, jo lahko okrajšamo in dobimo enačbo z eno neznanko $1{,}1 = 1 + \frac{p \cdot 3}{400}$. Od tu do rešitve ni več daleč. Iskana obrestna mera je 13,33 %.

ZGLED 5

Premostitveno posojilo, ki ga moramo vrniti čez 5 mesecev, se obrestuje z uporabo navadnega obrestnega računa s 5,5 % obrestno mero, anticipativno. Koliko denarja dobimo danes izplačanega na osnovi tega posojila, če bo ob zapadlosti potrebno vrniti 3000 EUR?

Spoznali smo, da je osnova za izračun obresti pri anticipativnem obrestovanju končna glavnica (G, kar je v našem primeru 3000 EUR). Ob izplačilu dobimo za obresti manjši znesek (G^-). Torej velja $G^- = G - \frac{G \cdot p \cdot m}{1200}$. Računanje vam prepuščam v vajo. Izplačan pa dobimo seveda manjši znesek, kot ga je bilo potrebno vrniti (4931,25 EUR).

7. 2 INTERKALARNE OBRESTI

Če bi na primer sredi meseca želeli, da nam na banki odobrijo kredit, ki ga bomo nato odplačevali mesečno, se bodo za preostale dni v tem prvem mesecu, torej za čas od odobritve kredita do začetka njegovega odplačevanja, obračunale posebne obresti, ki jih imenujemo **interkalarne obresti**. Če uporabimo bolj strokovno terminologijo, gre v tem primeru torej za obresti, ki se za vsak del izkoriščenega kredita posebej (tranšo) obračunajo za čas od črpanja (porabe) tega zneska do začetka odplačevanja kredita. Zapadlost interkalarnih obresti je na dan prenosa kredita v odplačilo. Običajno se interkalarne obresti poravnajo na dva načina:

- na dan črpanja v diskontiranem znesku, po enaki metodi računanja obresti in po pogodbeni obrestni meri ali
- na dan prenosa kredita v odplačilo. (ZBS, 2008)

Interkalarne obresti se obračunavajo s proporcionalno obrestno mero, to je z uporabo navadnega obrestnega računa. Čeprav se dostikrat plačajo vnaprej, jih mora banka tudi v tem primeru obračunati na dekurzivni način.

Za dodatne informacije vam svetujem obisk spletne strani ene izmed bank.

Navadni obrestni račun je bil v naši finančni praksi dolgo časa potisnjen na stranski tir (ker po svoji definiciji ne omogoča rasti kapitala, saj se ne glede na število kapitalizacijskih obdobij obrestuje le osnovna glavnica). Zaradi istega razloga je zopet pridobil na veljavi (v oporo mu je tudi slovenski pravni sistem) in se uporablja pri presoji kratkoročnih poslov (do enega leta), hkrati pa predstavlja izhodišče obrestnoobrestnega računa, s katerim se bomo podrobneje seznanili v naslednjem poglavju.

VAJE

1. Kdaj smo vrnili dolg, če smo si 2. februarja 2009 sposodili 10000 EUR? Posojilo se je obrestovalo po 6 %, vrniti je bilo potrebno 10070,68 EUR, banka pa je upoštevala navadni obrestni račun in dekurzivno obrestovanje ter sistem (K, 365)?

2. Na koliko naraste glavnica 2800 EUR v treh četrtletjih pri 2,8 % obrestni meri, pri upoštevanju navadnega obrestnega računa in dekurzivnega obrestovanja?

3. Skupaj z 12 % zamudnimi navadnimi obrestmi smo pri dekurzivnem obrestovanju plačali 838,30 EUR. Koliko so znašale zamudne obresti in kolikšen je bil dolgovan znesek, če smo s plačilom zamudili en mesec?

4. Po kolikšni obrestni meri se je obrestovalo izplačano posojilo 1937 EUR, ki jih je potrebno vrniti čez pol leta skupaj s 63 EUR obresti? Upoštevati je potrebno navadni obrestni račun in anticipativno obrestovanje.

Rešitve

1. 17. marca 2009
2. 2858,80 EUR
3. 8,30 EUR, 830 EUR
4. 6,3 %

8. OBRESTNOOBRESTNI RAČUN

Osnovna značilnost obrestnoobrestnega načina je *načelo kapitalizacije obresti*, saj obresti ne računamo samo od prvotne glavnice, ampak tudi od vseh obresti, nastalih v preteklih kapitalizacijskih obdobjih. Kapitalizacija obresti torej pomeni, da se po preteku kapitalizacijskega obdobja v tem času nastale obresti preoblikujejo v kapital.

Pri praktični uporabi obrestnoobrestnega računa si bomo pomagali z naslednjimi oznakami:
- začetna vrednost glavnice – $\mathbf{G_0}$
- končna vrednost glavnice – $\mathbf{G_n}$
- obresti – **o**
- dekurzivna obrestna mera – **p**
- dekurzivni obrestovalni faktor – **r**
- anticipativna obrestna mera – π (pi)
- anticipativni obrestovalni faktor – ρ (ro)
- število kapitalizacijskih obdobij (kolikokrat se glavnica vse skupaj obrestuje) – **n**
- oznaka kapitalizacije (kolikokrat se glavnica obrestuje v enem letu) – **m**.

Kot že vemo, imamo dva različna načina obračunavanja obresti, dekurzivnega in anticipativnega. Najprej bomo spoznali dekurzivno obrestno obrestovanje, nato anticipativno, oba v primeru celoletne kapitalizacije. Celoletna kapitalizacija pomeni, da se obresti računajo po preteku celega leta. Ker pa je v praksi tako obrestovanje prej izjema kot pravilo, bomo nadaljevali z obravnavo dekurzivnega in anticipativnega obrestnega obrestovanja v primerih pogostejše kapitalizacije. Seveda pa je to samo grob okvir tem, ki so pred nami.

8. 1 DEKURZIVNI OBRESTNOOBRESTNI RAČUN

Dekurzivno obrestovanje pomeni, da se obresti pripišejo h glavnici na koncu kapitalizacijskega obdobja. Če se torej glavnica G_0 obrestuje eno leto, imamo po tem obdobju glavnico, ki smo jo povečali za nastale obresti $G_1 = G_0 + o$. Ker se je glavnica v tem času obrestovala le enkrat, uporabimo za izračun obresti nam že znan obrazec $o = \frac{G_0 \cdot p}{100}$ (ker imamo obdobje enega leta, le-tega lahko zanemarimo) in jih vnesemo v obrazec za povečano glavnico. Tako velja $G_1 = G_0 + \frac{G_0 \cdot p}{100}$. Če izpostavimo začetno vrednost glavnice, dobimo $G_1 = G_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)$. Izraz v oklepaju se pogosto uporablja, zato ga označimo z *r* (**dekurzivni obrestovalni faktor**) in je torej $r = 1 + \frac{p}{100}$. Gornjo enačbo tako nadomestimo z obliko $G_1 = G_0 r$. Če nadaljujemo po istem principu, dobimo glavnico po dveh letih $G_2 = G_1 + \frac{G_1 \cdot p}{100} = G_1\left(1 + \frac{p}{100}\right) = G_1 r$, saj je osnova za izračun obresti v drugem letu glavnica, ki jo imamo konec prvega leta. Namesto G_1 vnesemo v enačbo obrazec, po katerem smo ga izračunali $G_2 = (G_0 r)r = r^2$. Iz tega lahko izpeljemo splošni **obrazec za izračun končne vrednosti glavnice** dekurzivnega obrestovanja

$$G_n = G_0 \cdot r^n, \qquad \text{pri čemer je} \qquad r = 1 + \frac{p}{100}$$

Obrazec velja tudi za krajša kapitalizacijska obdobja, če podatke temu ustrezno prilagodimo. Iz zapisa vidimo, da pri obrestnem obrestovanju glavnica narašča kot geometrijsko zaporedje, katerega prvi člen je začetna glavnica, količnik pa dekurzivni obrestovalni faktor r. (Čibej, 2004)

ZGLED 1

Koliko bomo imeli v banki čez 8 let, če smo v banko, ki obrestuje vloge po 3,5 %, vložili 30000 EUR? Obrestovanje je dekurzivno in kapitalizacija celoletna.

Iz obrestne mere določimo obrestovalni faktor $r = 1 + \frac{p}{100} = 1{,}035$. Nato po obrazcu izračunamo končno glavnico $G_8 = G_0 \cdot r^8 = 30000 \cdot 1{,}035^8 = 39504{,}27$ EUR. V nalogah bomo upoštevali tudi pravilo, da se obrestovalni faktorji izkazujejo na najmanj štiri decimalna mesta. Pri zaokroževanju obrestnih mer in iz njih izpeljanih obrestovalnih faktorjev pa se uporablja matematično načelo zaokroževanja.

ZGLED 2

Kolikšna glavnica v desetih letih, pri 4 % obrestni meri, dekurzivnem obrestnem obrestovanju in celoletni kapitalizaciji, naraste na 5920,98 EUR?

Naloga nas sprašuje po vrednosti začetne glavnice. Zato bomo iz osnovnega obrazca $G_n = G_0 \cdot r^n$ izpeljali **obrazec za izračun začetne vrednosti glavnice**:

$$G_0 = \frac{G_n}{r^n}$$

V obrazec vstavimo podatke in izračunamo neznanko $G_0 = \frac{5920{,}98}{1{,}04^{10}} = 4000$ EUR.

ZGLED 3

Po kolikšni obrestni meri je banka obrestovala vlogo 3000 EUR, ki je v 7 letih narasla za 10 % svoje začetne vrednosti, če uporabljamo celoletno kapitalizacijo in dekurzivno obrestno obrestovanje?

Začetna glavnica je torej v sedmih letih narasla na 3300 EUR, kar predstavlja končno glavnico. Izpeljimo še **obrazec za izračun obrestne mere.** Ker se le-ta skriva v obrestovalnem faktorju r, bomo obrestno mero izračunali postopoma preko obrestovalnega faktorja. Iz obrazca $G_n = G_0 \cdot r^n$ sledi

$$r = \sqrt[n]{\frac{G_n}{G_0}}$$

Ker pa vemo, da je obrestovalni faktor izračunamo po obrazcu $r = 1 + \frac{p}{100}$, lahko enostavno iz njega določimo obrestno mero

$$p = 100 \cdot (r - 1)$$

Za naš primer torej velja $r = \sqrt[7]{\frac{3300}{3000}} 1{,}0137$, pri čemer ne pozabimo, da je faktor r brez enot. Iz tega sledi, da se je glavnica obrestovala po 1,37 % obrestni meri.

ZGLED 4

Koliko let je bila vložena glavnica 1000 EUR, če je pri 3,5 % obrestni meri, dekurzivnem obrestnem obrestovanju in celoletni kapitalizaciji dala 147,52 EUR obresti?

Končna glavnica je v našem primeru začetna glavnica, h kateri smo prišteli obresti, torej 1147,52 EUR. Da pa bomo izračunali ustrezno število let, bomo izpeljali **obrazec za izračun časa obrestovanja**. Ker je neznanka v osnovnem obrazcu $G_n = G_0 \cdot r^n$ sedaj eksponent n, ga bo potrebno logaritmirati. Seveda ste logaritme že dodobra spoznavali pri srednješolski matematiki, zato jih ne bomo razlagali in izpeljavo enačbe prepuščam vam. Obrazec za izračun časa obrestovanja pa je naslednji:

$$n = \frac{\log G_n - \log G_0}{\log r}$$

V obrazec vstavimo naše podatke in izračunamo neznanko: $n = \frac{\log 1147{,}52 - \log 1000}{\log 1{,}035} = 4$ leta.

ZGLED 5

Glavnica 1000 EUR, ki se je obrestovala šest let, od tega zadnji dve leti po 3 % obrestni meri, je narasla na 1.171,04 EUR. Po kakšni dekurzivni obrestni meri je banka obrestovala vlogo v prvem obdobju, če je pogodbeno za vsa leta določeno dekurzivno obrestno obrestovanje in celoletna kapitalizacija? Za koliko odstotnih točk je bila obrestna mera v drugem obdobju višja od prve?

Če se neka glavnica obrestuje po dveh ali več različnih obrestnih merah, lahko njeno končno vrednost izračunamo postopoma, tako da jo najprej obrestujemo po prvi obrestni meri in nato dobljen znesek obrestujemo po drugi obrestni meri. Delo pa si olajšamo, če postopnost nadomestimo z obrazcem

$$G_n = G_0 \cdot r_1^{n_1} \cdot r_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot r_n^{n_k}$$

Ker je v našem primeru prva obrestna mera neznana, vemo pa, da se obrestna mera ″skriva″ v obrestovalnem faktorju, bomo iz enačbe $1171{,}04 = 1000 \cdot r_1^4 \cdot 1{,}03^2$ izračunali r_1 $r_1 = \sqrt[4]{\frac{1171{,}04}{1000 \cdot 1{,}03^2}} = 1{,}025$. Po obrazcu $p_1 = 100 \cdot (r_1 - 1)$ sledi, da se je glavnica prva štiri leta obrestovala po 2,5 % obrestni meri.

Obrestna mera v drugem obdobju je bila od prve višja za 0,5 odstotne točke. Razlika med dvema odstotkoma so odstotne točke. Žal se v praksi pogosto zanemarja ta pojem oziroma se odstotki zlorabljajo. Za vajo lahko sami izračunate, kolikšna bi bila dejanska druga obrestna mera, če bi bila od prve večja za 0,5 % (ponovitev poglavja o procentnem računu).

8. 2 ANTICIPATIVNI OBRESTNOOBRESTNI RAČUN

Kot smo že povedali v 6. poglavju, je glavna razlika med dekurzivnim in anticipativnim obrestovanjem v tem, da se pri drugem obresti obračunajo že vnaprej, pri čemer je osnova končna glavnica, obresti pa se že na začetku od nje odštejejo. Da ne bo prihajalo do pomot, bomo anticipativno obrestno mero označevali z grško črko π. Če podobno kot pri izpeljavi osnovnega obrazca za dekurzivno obrestovanje predpostavljamo obdobje enega leta, dobimo za anticipativno obrestovanje naslednji zapis $G_0 = G_1 - \frac{G_1 \cdot \pi}{100} = G_1\left(1 - \frac{\pi}{100}\right)$. Iz obrazca izrazimo končno glavnico in odpravimo dvojni ulomek. Pri tem dobimo primerljiv obrazec z dekurzivnim obrestovanjem: $G_1 = G_0 \frac{100}{100 - \pi}$. Izraz na desni bomo označili z ρ in poimenovali **anticipativni obrestovalni faktor.** Faktor je logično brez enot. Sedaj lahko izpeljemo splošni **obrazec za izračun končne vrednosti glavnice** anticipativnega obrestovanja

$$G_n = G_0 \cdot \rho^n, \qquad \text{pri čemer je} \qquad \rho = \frac{100}{100 - \pi}$$

ZGLED 6

Koliko obresti bomo morali plačati za posojilo v znesku 15000 EUR, ki smo ga prejeli pred petimi leti in se je obrestoval po 5,6 %? Upoštevati je potrebno celoletno kapitalizacijo.

Obresti so razlika med končno in začetno glavnico. Začetno glavnico že imamo, za izračun končne glavnice pa najprej izračunamo anticipativni obrestovalni faktor $\rho = \frac{100}{100 - \pi} = \frac{100}{100 - 5,6}$. Lahko ga pustimo v obliki ulomka in z njegovo pomočjo izračunamo končno glavnico $G_n = G_0 \cdot \rho^n = 15000 \cdot \left(\frac{100}{100 - 5,6}\right)^5 = 20.009,27$ EUR .

ZGLED 7

Kolikšna glavnica je pri 4,3 % obrestni meri, anticipativnem obrestnem obrestovanju in celoletni kapitalizaciji, v 10 letih narasla na 31039,20 EUR?

Ker je tokratna neznanka začetni znesek, bomo iz osnovnega obrazca $G_n = G_0 \cdot \rho^n$ izpeljali **obrazec za izračun začetne vrednosti glavnice**:

$$G_0 = \frac{G_n}{\rho^n}$$

V obrazec vstavimo podatke in izračunamo neznanko $G_0 = \frac{31039,20}{\left(\frac{100}{100 - 4,3}\right)^{10}} = 20000$ EUR.

ZGLED 8

Glavnica 10000 EUR se je pri celoletni kapitalizaciji obrestovala 4 leta po anticipativnem obrestnem obrestovanju. Po kolikšni letni obrestni meri se je obrestovala, da je narasla za 1773,76 EUR?

Začetna glavnica je v štirih letih narasla na 11773,76 EUR, kar predstavlja končno glavnico. Izpeljimo **obrazec za izračun obrestne mere.** Ker se le-ta skriva v anticipativnem obrestovalnem faktorju ρ, bomo obrestno mero izračunali podobno kot pri dekurzivnem obrestovanju preko obrestovalnega faktorja. Iz obrazca $G_n = G_0 \cdot \rho^n$ sledi

$$\rho = \sqrt[n]{\frac{G_n}{G_0}}$$

Ker pa vemo, da obrestovalni faktor izračunamo po obrazcu $\rho = \frac{100}{100 - \pi}$, lahko enostavno iz njega izrazimo obrazec za izračun anticipativne obrestne mere

$$\pi = \frac{100(\rho - 1)}{\rho}$$

V našem primeru to pomeni $\rho = \sqrt[4]{\frac{11773,76}{10000}} = 1,0417$, nato izračunamo obrestno mero

$$\pi = \frac{100(1,0417 - 1)}{1,0417} = 4\%$$

ZGLED 9

Pred koliko leti smo začeli obrestovati glavnico 900 EUR, da je pri 5 % letni obrestni meri in celoletni kapitalizaciji ter anticipativnem obrestnem obrestovanju narasla na 1049,72 EUR?

Čaka nas izpeljava še zadnjega obrazca za anticipativno obrestno obrestovanje, to je izpeljava **obrazca za izračun časa obrestovanja**. Ker je izpeljava identična izpeljavi za n pri dekurzivnem obrestovanju, le zapišimo obrazec

$$n = \frac{\log G_n - \log G_0}{\log \rho}$$

V obrazec vstavimo še podatke in izračunamo čas obrestovanja naše glavnice:

$$n = \frac{\log 1049,72 - \log 900}{\log \frac{100}{100 - 5}} = 3 \text{ leta}$$

8. 2. 1 Ekvivalentnost dekurzivne in anticipativne obrestne mere

O ekvivalentnih obrestnih merah govorimo, če pri enakih vhodnih podatkih (G_0, n, m), ne glede na metodo obračuna (dekurzivno ali anticipativno obrestno obrestovanje), dobimo enako končno vrednost glavnice (oz. enake nominalne obresti). Sledi, da morata biti obrestovalna faktorja pri obeh načinih enaka $r = \rho$, kar ne pomeni, da sta enaki tudi obrestni meri $p \neq \pi$. Iz enačbe $1 + \frac{p}{100} = \frac{100}{100 - \pi}$ tako izpeljemo naslednji enačbi:

- dekurzivna ekvivalentna obrestna mera:

$$p = \frac{100\pi}{100 - \pi}$$

- anticipativna ekvivalentna obrestna mera:

$$\pi = \frac{100p}{100 + p}$$

ZGLED 10

Katera anticipativna obrestna mera je ekvivalentna dekurzivni obrestni meri 3,2 %? Koliko znaša anticipativni obrestovalni faktor?

Pri tej nalogi je pomembno le poznavanje oznak in obrazec. V našem primeru imamo $\pi = \frac{100 \cdot 3{,}2}{100 + 3{,}2} = 3{,}1$ %. Logično je, da je ekvivalentna anticipativna obrestna mera manjša od dekurzivne, saj je osnova za izračun obresti višja pri dekurzivnem obrestovanju. Anticipativni obrestovalni faktor pa izračunamo za vajo in znaša 1,0331.

8. 2. 2 Povprečna obrestna mera

ZGLED 11

Neka glavnica se je najprej obrestovala 5 let po 3,6 % letni obrestni meri, nato še 2 leti po za eno odstotno točko višji obrestni meri. Kolikšna je bila povprečna obrestna mera, po kateri se je obrestovala glavnica, če banka uporablja dekurzivno obrestno obrestovanje in celoletno kapitalizacijo?

Glavnica se lahko v nekem časovnem obdobju obrestuje po dveh ali več različnih obrestnih merah. Končna glavnica bi bila enaka v primeru, če bi začetno glavnico obrestovali po dejanskih obrestnih merah in ustreznih časovnih obdobjih ali pa bi za celotno obdobje obrestovanja uporabili povprečno obrestno mero. Povprečne obrestne mere ne moremo izračunati z uporabo osnovnega obrazca za aritmetično sredino (le-tega si boste pogledali pri statistiki), saj na višino povprečne obrestne mere vpliva število kapitalizacijskih obdobij, po katerih so se uporabljale dejanske obrestne mere. Zato povprečno obrestno mero izpeljemo iz obrazca, ki smo ga spoznali v prejšnjem zgledu $G_n = G_0 \cdot r_1^{n_1} \cdot r_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot r_n^{n_k}$. Končno glavnico lahko izračunamo tudi s pomočjo povprečne obrestne mere s pomočjo obrazca $G_n = G_0 \cdot \left(\bar{r}\right)^n$, pri čemer je $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.

Če izenačimo oba zapisa končne glavnice, dobimo $G_0 \cdot \left(\bar{r}\right)^n = G_0 \cdot r_1^{n_1} \cdot r_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot r_n^{n_k}$ Enačbo delimo z osnovno glavnico, opravimo še korenjenje z n in dobimo obrazec za povprečni dekurzivni obrestovalni faktor:

$$\bar{r} = \sqrt[n]{r_1^{n_1} \cdot r_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot r_m^{n_m}} \qquad (n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m)$$

Iz njega pa enostavno izračunamo povprečno dekurzivno obrestno mero po obrazcu, ki nas na nekaj spominja:

$$\bar{p} = (\bar{r} - 1) \cdot 100$$ (Čibej, 2004)

V našem primeru je $n = 5 + 2 = 7$ in $\bar{r} = \sqrt[7]{1{,}036^5 \cdot 1{,}046^2} = 1{,}0388$. Povprečna obrestna mera torej znaša $\bar{p} = (1{,}0388 - 1) \cdot 100 = 3{,}88\ \%$

8. 3 POGOSTEJŠA KAPITALIZACIJA

Kot smo omenili v uvodnem poglavju obrestnega računa, se lahko glavnica obrestuje letno ali tudi pogosteje. Če je kapitalizacijsko obdobje krajše od enega leta, govorimo o pogostejši kapitalizaciji. V primeru, ko se glavnica obrestuje pogosteje kot enkrat letno, ko je torej $m > 1$, moramo letno obrestno mero ustrezno prilagoditi kapitalizaciji.

Poznamo dva načina spremembe letne obrestne mere:
- relativno ali proporcionalno in
- konformno.

Pogostejši kapitalizaciji moramo poleg prilagoditve obrestne mere prilagoditi tudi parameter m, ki pripoveduje o pogostosti kapitalizacije in ima v praksi nekaj značilnih vrednosti:
- m = 2 pri polletni kapitalizaciji,
- m = 4 pri četrtletni kapitalizaciji,
- m = 12 pri mesečni kapitalizaciji in
- m = 365 (ali m = 366 v primeru prestopnega leta) pri dnevni kapitalizaciji.

Kapitalizaciji se prilagodijo oznake za obrestno mero (letna obrestna mera je a % p.a.):
- a % p.s. (pri m = 2),
- a % p.q. (pri m = 4),
- a % p.m. (pri m = 12) in
- a % p.d. (pri m = 365 oz. 366).

8. 3. 1 Relativna ali proporcionalna obrestna mera

Relativno oziroma proporcionalno obrestno mero smo spoznali že pri obravnavi navadno obrestnega računa, saj smo že tam obrestno mero prilagodili kapitalizaciji, tako da smo jo delili z ustreznim delom leta. Relativna obrestna mera se uporablja v bančni praksi. Pomeni pa tolikokrat manjšo od letne obrestne mere, kolikokrat je kapitalizacijsko obdobje krajše od enega leta. Pri enakih ostalih pogojih so obresti pri pogostejši kapitalizaciji višje. (Čibej, 2004)

Osnovni obrazec za relativno oz. proporcionalno obrestno mero je:

- relativna (ali proporcionalna) dekurzivna obrestna mera

$$p_m' = \frac{p}{m}$$

- relativna (ali proporcionalna) anticipativna obrestna mera

$$\pi_m' = \frac{\pi}{m}$$

Obrestne mere za krajša obdobja naj bi bile izražene tako natančno, da je pri preračunu na letno raven zagotovljena predvidena natančnost letne obrestne mere.

ZGLED 12

Banki dolgujemo 900 EUR, ki jih bomo po pogodbi vrnili čez 18 mesecev**,** obrestna mera je 6 % letno. Banka dolg obrestuje s polletno kapitalizacijo in relativno obrestno mero ter dekurzivnim obrestnoobrestnim računom. Kolikšna je bila cena posojila?

Če zanemarimo otvoritvene stroške posojila in stroške njegovega zavarovanja (ki so seveda še kako pomembni), potem vemo, da so cena posojila obresti. Kot smo že spoznali, so obresti razlika med končno in začetno glavnico. Za izračun končne glavnice pa moramo najprej določiti n. Ker banka uporablja polletno kapitalizacijo, se je glavnica v 18 mesecih obrestovala trikrat, kar pomeni n = 3. Ustrezno prilagodimo še obrestno mero $p_s' = \frac{6}{2} = 3$ %. Vrednosti vstavimo v obrazec za izračun končne glavnice $G_n = 900 \cdot 1{,}03^3 = 983{,}45$ EUR. Cena posojila je bila torej 983,45 EUR.

ZGLED 13

Katera letna obrestna mera prinese v obdobju od 12. 6. do 1. 9. istega (neprestopnega) leta, pri uporabi dnevne kapitalizacije in dekurzivnega obrestnega obrestovanja ter relativne metode, na začetno glavnico 1400 EUR točno 12,48 obresti?

Glavnica se je obrestovala 81 dni. Izračunamo dnevni obrestovalni faktor (v pomoč poglejte zgled 3 v tem poglavju) in iz njega določimo dnevno proporcionalno obrestno mero, ki znaša 0,01096 %. Iz obrazca $p_d' = \frac{p}{365}$ sledi, da znaša letna obrestna mera 365-kratno vrednost dnevne obrestne mere. $p = 0{,}01096 \cdot 365 = 4\,\%$ p.a.

ZGLED 14

Koliko let se je obrestovala glavnica 20000 EUR, da je pri uporabi dekurzivnega obrestovanja, polletni kapitalizaciji in 2 % polletni obrestni meri, narasla na 24379,89 EUR?

Sprememba obrestne mere tu ni potrebna. Podana obrestna mera (polletna) namreč v tem primeru že ustreza kapitalizaciji. Izračunano, kolikokrat se je naša glavnica obrestovala: $n = \frac{\log 24379{,}89 - \log 20000}{\log 1{,}02} = 10$. Dobljena vrednost je število polletij (n vedno izraža število obdobij, ki ustrezajo kapitalizaciji). Ker naloga od nas zahteva čas obrestovanja v letih, polletja preračunamo v leta (let je logično dvakrat manj kot polletij) in dobimo rešitev naloge: glavnica se je obrestovala 5 let.

ZGLED 15

Po kolikšni letni anticipativni obrestni meri se je obrestovala glavnica 1000 EUR, da je v 6 mesecih, pri uporabi četrtletne kapitalizacije in relativnega načina, narasla na 1020,30 EUR?

Tudi naloge anticipativnega obrestovanja rešujemo podobno kot naloge dekurzivnega obrestovanja, le da smo tukaj pozorni na razliko pri izračunu obrestovalnega faktorja. Zgled vam prepuščam v vajo. Poleg zadnjih zgledov vam bo v pomoč tudi zgled 9. Rešitev pa je 4 % p. a.

8. 3. 2 Konformna obrestna mera

Konformna obrestna mera je takšna obrestna mera, ki v enem letu, ne glede na vrsto kapitalizacije, prinese enake obresti kot letna obrestna mera pri celoletni kapitalizaciji, medtem ko pri relativnem načinu pogostejša kapitalizacija pomeni višje obresti. Pomeni, da je višina plačanih obresti za posojilojemalca, ki vrne kredit v enkratnem znesku natanko po enem letu, neodvisna od tega, kako pogosta je bila kapitalizacija. (Čibej, 2004)

V tem primeru matematično spreminjamo obrestovalni faktor, saj le-ta določa obresti. Velja $r_m^{\,m} = r$, če predpostavimo obdobje enega leta. Po opravljenem korenjenju dobimo $r_m = \sqrt[m]{r}$ oz. ko za letni faktor vstavimo obrazec za njegov izračun, dobimo:

- konformni dekurzivni obrestovalni faktor

  $$r_m^{\,'} = \sqrt[m]{1 + \frac{p}{100}}$$

- konformni anticipativni obrestovalni faktor

  $$\rho_m^{\,'} = \sqrt[m]{\frac{100}{100 - \pi}}$$

ZGLED 16

Z banko, ki daje posojila po letni anticipativni obrestni meri 7 % letno, smo sklenili pogodbo za posojilo v znesku 800 EUR, ki ga moramo vrniti v 100 dneh. Kolikšen znesek smo prejeli od banke ob sklenitvi posla, če uporabljamo konformno obrestno mero in dnevno kapitalizacijo?

Letni anticipativni obrestovalni faktor najprej spremenimo v dnevnega $\rho_d^{\,'} = \sqrt[365]{1{,}075269}$. Ob sklenitvi poslov smo prejeli manjši znesek (anticipativno obrestovanje označuje 800 EUR kot končno glavnico), kar pomeni, da iščemo G_0. Končno glavnico torej delimo z dnevnim obrestovalnim faktorjem, ki smo ga predhodno naobrestili za število dni in tako dobimo izplačano posojilo v znesku 784,25 EUR.

ZGLED 17

Po kolikšni letni dekurzivni obrestni meri se je obrestovala glavnica 1000 EUR, da je v 5 mesecih pri konformnemu načinu narasla za 5 % svoje vrednosti?

Ker gre za konformni način, pri katerem so obresti enake ne glede na kapitalizacijsko obdobje, je ta podatek lahko izpuščen. Mi bomo logično uporabili mesečno kapitalizacijo. Končna glavnica znaša 105 % začetne glavnice, kar je 1050 EUR. Izračunamo mesečni obrestovalni faktor $r_m^{\,'} = \sqrt[n]{\frac{G_n}{G_0}} = \sqrt[5]{\frac{1050}{1000}} = 1{,}009806$, sprmenimo ga v letnega $r = r_m^{\,12} = 1{,}009806^{12} = 1{,}1242$. Glavnica se je torej obrestovala po 12,42 % p.a.

To je bilo na kratko o obrestnem računu vse. Ponovimo, da ločimo navadno obrestovanje od obrestnega in dekurzivno od anticipativnega. Pri pogostejši kapitalizaciji pa imamo poleg relativne oziroma proporcionalne obrestne mere še konformno obrestno mero. Obrestovanje nas bo spremljalo še pri zadnjih poglavjih, to so poglavja o periodičnih in hranilnih vlogah ter posojilih.

VAJE

1. Glavnica 3000 EUR se obrestuje 5 let po 4 % p.a. anticipativno obrestnoobrestno pri letni kapitalizaciji. Kakšna je letna dekurzivna mera, s katero bi v istem času dobili za 20 EUR večje obresti?

2. Znesek, ki ga je dolžnik vrnil, je bil trikrat tolikšen kot znesek izplačanega posojila. Po kolikšnem času je vrnil denar, če je bilo obrestovanje dekurzivno obrestnoobrestno, glavnica se je obrestovala po 13,26 % p.a. in je kapitalizacija mesečna ter se upošteva ustrezna proporcionana obrestna mera?

3. Katera dekurzivna obrestna mera je ekvivalentna anticipativni obrestni meri 4,3 %? Koliko znaša dekurzivni obrestovalni faktor?

4. Glavnica se je obrestovala 10 let po povprečni obrestni meri 3,39 %. Prva 4 leta se je obrestovala po 3 %, nato 3 leta po 3,3 %, nato se obrestuje vse do konca po neznani obrestni meri. Koliko je znašala obrestna mera v zadnjem obdobju, če upoštevamo dekurzivno obrestovanje in celoletno kapitalizacijo?

Rešitve

1. 4,28 %
2. 100 mesecev
3. 4,49 %, 1,0449
4. 4 %

9. LITERATURA

Čibej, J. A. *Poslovna matematika I. del*. Ljubljana: DZS, 2002.

Čibej, J. A. *Poslovna matematika II. del*. Ljubljana: DZS, 2004.

Jager, G. *Poslovna matematika*. Ljubljana: samozaložba, 2002.

Pirš, V. *Gradivo za predmet poslovna matematika 1* (gradivo za interno uporabo). Kamnik, ŠCRM, 2007.

Pirš, V. *Gradivo za predmet poslovna matematika 2* (gradivo za interno uporabo). Kamnik, ŠCRM, 2007.

ZBS: Priporočila o načinu obračunavanja obresti za posle s prebivalstvom. Ljubljana: ZBS, 2008.

Banka Slovenije. *Tečajnica Banke Slovenije- referenčni tečaji ECB*. (online) 2009. (citirano 22. 5. 2009). Dostopno na naslovu: http://www.bsi.si/podatki/tec-bs.asp?MapaId=1230/